№5

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«НОВОРОССИЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
(ГБПОУ КК НКРП)

Методические указания
для студентов по проведению практических занятий

Учебная дисциплина	ЕН.01 Математика
Специальность	38.02.05 Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров

2021

Согласовано
Советом по методическим вопросам
протокол от 17.12 2021 г. № 4
Председатель
__________ Е.В. Кужилева

Утверждаю
Зам. директора по УР
__________ Т.В. Трусова
17 12 2021 г.

Рассмотрено
УМО математических и общих естественнонаучных дисциплин
Протокол от 08.11 2021 г. № 3
Председатель УМО
__________ О.Н. Поволоцкая

Организация-разработчик: ГБПОУ КК «Новороссийский колледж радиоэлектронного приборостроения» (далее ГБПОУ КК НКРП)

Разработчик:
преподаватель ГБПОУ КК НКРП __________ О.Н. Поволоцкая

Рецензенты:
Трудникова Н.М., __________ к.х.н., преподаватель математики ГБПОУ КК НСПК

Николаенко Т.П., __________ преподаватель математики высшей квалификационной категории ГБПОУ КК НКРП

РЕЦЕНЗИЯ

на методические указания по выполнению практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Математика, разработанные преподавателем ГБПОУ КК «Новороссийский колледж радиоэлектронного приборостроения» Поволоцкой О.Н.

Рецензируемые методические указания по выполнению практических занятий учебной дисциплины ЕН.01 Математика разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.05 Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров (утв. приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 28.07.2014 г. № 835, зарегистрирован в Минюст России от 25.08.2014 г. № 33769) и на основе рабочей программы учебной дисциплины (утв. директором колледжа 03.07.2021 г.).

Методические указания включают в себя пояснительную записку, требования по оформлению практических занятий, описания по выполнению практических занятий в соответствии с рабочей программой ЕН.01 Математика.

Практические занятия представлены в логической последовательности, согласно рабочей программе в объеме 30 часов. Дано подробное описание конкретного практического занятия, контрольные вопросы.

Методические рекомендации имеют практическую направленность. Представленные задания включают в себя освоение следующих умений:

- рассматривать профессиональные проблемы, используя математический аппарат;
- умело рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности;
- умение обоснованно и адекватно применять методы и способы решения задач в профессиональной деятельности.

Формируемые в процессе практических занятий умения и навыки могут быть использованы студентами в будущей профессиональной деятельности.

Содержание дисциплины ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей по специальности и овладению следующими компетенциями:

ПК 1.1.Выявлять потребность в товарах.

ПК 3.1.Участвовать в планировании основных показателей деятельности организации.

ОК 1. Понимать сущность и социальную зависимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Владеть информационной культурой, анализировать и оценивать информацию с использованием информационно- коммуникационных технологий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознано планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий и профессиональной деятельности.

Таким образом, методические указания по выполнению практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Математика способствуют формированию общих и профессиональных компетенций, соответствуют ФГОС среднего профессионального образования по специальности 38.02.05 Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров, рабочей программе учебной дисциплины ЕН.01 Математика и рекомендуются для использования в образовательном процессе ГБПОУ КК НКРП.

Рецензент:

Трудникова Н.М., к.х.н., преподаватель математики ГБПОУ КК НСПК

05 11 2021 г.

Рецензия
на методические указания по проведению практических занятий по учебной дисциплине ЕН. 01 Математика
для обучающихся по специальности 38.02.05 Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров

Методические указания по проведению практических занятий подготовлены Поволоцкой Ольгой Николаевной, преподавателем государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Краснодарского края «Новороссийский колледж радиоэлектронного приборостроения».

Методические указания по проведению практических занятий учебной дисциплины ЕН. 01 Математика разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01 Математика (утв. директором колледжа), Положения по планированию, организации, и проведению практических занятий (утв. директором колледжа).

Количество часов на выполнение практических занятий соответствует учебному плану и составляет 30 часов.

В методическом указании дано описание 15 практических занятий. Каждое практическое задание содержит следующие разделы: цель занятия, теоретические сведения, задания для выполнения работы, контрольные вопросы. Представлены образцы решений заданий и критерии оценок. Для каждой работы разработаны варианты заданий.

Выполнение работ формирует у студентов необходимые профессиональные и общие компетенции, наличие которых предусматривает ФГОС СПО по специальности 38.02.05 Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров.

Таким образом, методические указания по проведению практических занятий учебной дисциплины ЕН.01 Математика способствуют формированию общих компетенций, обеспечивают проведение текущего контроля знаний обучающихся, и могут быть использованы в учебном процессе Новороссийского колледжа радиоэлектронного приборостроения.

Рецензент:
Никодаенко Т.П., ________ преподаватель математики высшей категории
ГБПОУ КК НКРП

«05» 11 ________ 2021г.

УЧЕБНАЯ ЧАСТЬ

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации содержат методические указания к практическим работам по дисциплине ЕН.01 Математика и предназначены для обучающихся по специальности 38.02.05 Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров

Методические указания предназначены для организации эффективной практической работы студентов. Практическая работа направлена на повышение качества подготовки компетентного конкурентоспособного специалиста, приспособленного к самостоятельной профессионально-ориентированной деятельности на основе сформированных знаний, умений, опыта, общих и профессиональных компетенций.

Практическая работа должна содействовать активизации познавательной деятельности студентов, развитию творческого отношения к учебной деятельности, формированию навыков самостоятельного труда, умению решать профессиональные задачи, формированию потребности к непрерывному самообразованию, совершенствованию знаний и умений, расширению кругозора, приобретению опыта планирования и организации рабочего времени, выработке умений и навыков самостоятельной работы с учебной литературой, обеспечению ритмичной и качественной работы студентов в течение учебного года.

В качестве форм и методов контроля практической работы студентов используются задания по темам на аудиторных занятиях.

Практические задания разработаны в соответствии с рабочей программой.

В процессе выполнения практических заданий студент должен приобрести ***умения*** решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Результатом освоения дисциплины и выполнения практических заданий является овладение студентами следующими ***компетенциями***:

Код	Наименование результата обучения
ПК 1.1.	Выявлять потребность в товарах.
ПК 3.1.	Участвовать в планировании основных показателей деятельности организации.
ОК 1.	Понимать сущность и социальную зависимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
ОК 2.	Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3.	Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
ОК 4.	Осуществлять поиск и использование информации необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
ОК 5.	Владеть информационной культурой, анализировать и оценивать информацию с использованием информационно- коммуникационных технологий.
ОК 8.	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознано планировать повышение квалификации.
ОК 9.	Ориентироваться в условиях частой смены технологий и профессиональной деятельности.

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Практические занятия проходят согласно учебному плану под руководством преподавателя при его непосредственном участии. Они представляют собой один из важнейших элементов изучения предмета и предназначены для углубления, расширения и закрепления знаний и умений.

Подготовка к практической работе

- В начале каждой темы преподаватель заранее объявляет о предстоящей практической работе, о количестве и видах практических работ, информирует о содержании и целях работы, порядке ее выполнения.
- Преподаватель предлагает обучающимся практическое выполнение задания по алгоритму.
- Преподаватель выдает бланки заданий обучающимся, обучающиеся приступают к выполнению работы: читают задание, задают вопросы, в тетради оформляют отчет.
- Преподаватель подробно инструктирует студентов о ходе предстоящей работы: называет тему, цели, требования к выполнению работы, форму отчета, а также критерии ее оценивания

Выполнение практической работы

- Обучающийся должен стремиться к аккуратности, полноте записей, работа должна быть выполнена полностью.
- Если в процессе подготовки к практическим работам или при их выполнении у обучающегося возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний.
- Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для допуска к экзамену по дисциплине, поэтому в случае отсутствия на занятии по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическую работу обучающийся должен найти время для ее выполнения или пересдачи во внеурочное время.
- Дополнительные занятия (для проведения консультаций, исправления неудовлетворительных оценок и ликвидации задолженностей) проводятся по предварительному согласованию с преподавателем.

Оформление практической работы

- Отчет о работах составляется по каждой выполненной работе на основе записей в общей тетради.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ РАБОТЫ

При оценке результатов выполнения практических работ студентами учитываются:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- уровень сформированности умения использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- умения обучающегося активно использовать электронные образовательные ресурсы, находить требующуюся информацию, изучать ее и применять на практике;
- умение ориентироваться в потоке информации, выделять главное;
- умение четко сформулировать проблему, предложив ее решение, критически оценить решение и его последствия;
- умение показать, проанализировать альтернативные возможности, варианты действий;
- умение сформировать свою позицию, оценку и аргументировать ее.
- уровень сформированности общих компетенций;
- уровень сформированности профессиональных компетенций;
- оформление материала в соответствии с предъявляемыми требованиями

Организация и руководство практическими работами студентами осуществляется преподавателем.

Оценка ***«отлично»*** *ставится:*

- студент свободно применяет знания на практике;
- студент не допускает ошибок в воспроизведении изученного материала;
- студент выделяет главные положения в изученном материале и не затрудняется в ответах на видоизмененные вопросы;
- студент усваивает весь объем программного материала;
- материал оформлен аккуратно и в соответствии с требованиями;

Оценка ***«хорошо»*** *ставится:*

- студент знает весь изученный материал;
- студент без особых затруднений отвечает на вопросы преподавателя;
- умеет применять полученные знания на практике;

- в условных ответах не допускает серьезных ошибок, легко устраняет определенные неточности с помощью дополнительных вопросов преподавателя;
- материал оформлен недостаточно аккуратно, но в соответствии с требованиями;

Оценка ***«удовлетворительно»*** *ставится:*

- студент обнаруживает освоение основного материала, но испытывает затруднения при его самостоятельном воспроизведении и требует дополнительных дополняющих вопросов преподавателя;
- предпочитает отвечать на вопросы воспроизводящего характера и испытывает затруднения при ответах на воспроизводящие вопросы;
- материал оформлен неаккуратно или не в соответствии с требованиями;

Оценка ***«неудовлетворительно»*** *ставится:*

- у обучающегося имеются отдельные представления об изучаемом материале, однако большая часть не усвоена;
- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере

Оценка индивидуальных образовательных достижений по результатам текущего и итогового контроля производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	**Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений**	
	балл (отметка)	**вербальный аналог**
90 ÷ 100	5	отлично
75 ÷ 89	4	хорошо
51 ÷ 74	3	удовлетворительно
менее 50	2	не удовлетворительно

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ТЕМАМ

№	Наименование практической работы	Время на выполнение практической работы (в аудитории)
1.	Вычисление производной функции	2
2.	Вычисление производной сложной функции	2
3.	Вычисление неопределенных интегралов от основных элементарных функций	2
4.	Вычисление определенных интегралов.	2
5.	Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла	2
6.	Операции над множествами	2
7.	Матричное задание графов, их метрические характеристики	2
8.	Операции над матрицами и определителями	2
9.	Решение систем линейных уравнений методами Крамера	2
10.	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	2
11.	Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической формах	2
12.	Применение определения классической вероятности к решению задач	2
13.	Применение терем сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности, формула Байесса	2
14.	Применение законов распределения к решению задач	2
15.	Выборки, выборочное распределение, построение полигона и гистограммы частот	2
	ИТОГО:	***30 часов***

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Практическое занятие № 1

Тема: Вычисление производной функции.

Цель занятия: закрепить навыки дифференцирования элементарных функций.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ или } y' = \lim_{x - x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**

Таблица производных:

a, n – некоторые числа, u, v – некоторые функции

1) $a' = 0$
2) $x' = 1$
3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + uv'$.
5) Ч. сл. $(a \cdot u)' = a \cdot u'$)
8) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
9) Ч. сл. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10) Ч. сл. $\left(\sqrt[m]{x^n}\right)' = \frac{n}{m \cdot \sqrt[m]{x^{m-n}}}$
11) $(\sin x)' = \cos x$
12) $(\cos x)' = -\sin x$

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2}$

Ч. сл. $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

7)

13) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

14)

Задания для самостоятельного выполнения:

ЗАДАНИЕ 1. Найдите производные функций

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1) $y = x^2 + x^3$	1) $y = x^2 + 3x$	1) $y = x^8 - 3x^4 - x$	1) $y = x^7 - 2x$
2) $y = \sin x + 3$	2) $y = 2\sin x + 3x$	2) $y = 7\sin x + 3x^3$	2) $y = \sin x + 4x^3$
3) $y = x^5 - 8x^{10}$	3) $y = 3x^{11} - 5x^4$	3) $y = 4x^5 - 2x^{14}$	3) $y = x^5 - 10x^4$
4) $y = \frac{1}{x} - 4\cos x$	4) $y = \frac{1}{x} - \cos x$	4) $y = \frac{9}{x} - 5\cos x$	4) $y = \frac{12}{x} - \cos x$
5) $y = 12x^2 - \sqrt{x}$	5) $y = 2x^3 - 4\sqrt{x}$	5) $y = 13x^2 + 8\sqrt{x}$	5) $y = 10x^3 + 2\sqrt{x} - 1$
6) $y = 5x^7 - \frac{3}{x^2} - 2$	6) $y = x^3 + 4x^2 - \frac{1}{x^2}$	6) $y = x^4 - 6x + \frac{3}{x^3}$	6) $y = x^4 - 6x + \frac{3}{x^3}$
7) $y = x \cos x$	7) $y = x \sin x$	7) $y = x\,\text{ctg}\,x$	7) $y = x^2 \cos x$
8) $y = (4 - x^2) \sin x$	8) $y = (x^2+5)(x^3 - 2x + 2)$	8) $f(x) = \sqrt{x}(3x^5 - x)$	8) $y = (2 - \sqrt{x})\,\text{tg}\,x$
9) $y = x(x^2 - 5x + 1)$	9) $y = x(x^3 + 4x^2 - 1)$	9) $y = x(x^5 - 2x + 1)$	9) $y = x(x^5 - 2x + 1)$

10) $y = \frac{x^2}{1+x}$	10) $y = \frac{3x - x^2}{1-x}$	10) $y = \frac{x}{1+x^2}$	10) $y = \frac{x^4+1}{x^2}$
11) $y = \frac{x^3 - 3x}{1-2x}$	11) $y = \frac{\sin x}{1 - 2\cos x}$	11) $y = \frac{\cos x}{2 - x^3}$	11) $y = \frac{5 - 2x^6}{1 - x^3}$
12) $y = \frac{2-x}{3x+1}$	12) $y = \frac{2x}{3+4x}$	12) $y = \frac{8x - x^2}{1+x}$	12) $y = \frac{x - \sqrt{3}}{3 - 2x}$
13) $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}$	13) $y = \frac{x^5 + 4x^4 - 1}{x^2}$	13) $y = \frac{x^6 + 2x^5 - 2}{x^3}$	13) $y = \frac{2x^5 - x^4 + 3}{x^2}$
14) $y = \frac{2\sqrt{x}}{3x+1}$	14) $y = \frac{-\sqrt{x}}{4x+2}$	14) $y = \frac{3\sqrt{x}}{4x+2}$	14) $y = \frac{6x-1}{-\sqrt{x}}$

ЗАДАНИЕ 2. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$	$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$	$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$

ЗАДАНИЕ 3. Решите неравенство $f'(x) < 0$, если:

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x$	$f(x) = 3x - 5x^2 + x^3$	$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$	$f(x) = 3x^2 - 9x - \frac{1}{2}x^3$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной
2. Сформулируйте теорему о производной логарифмической функции.
3. Сформулируйте теорему о производной степенной функции.
4. Сформулируйте теорему о производной показательной функции.

Практическое занятие 2.

Тема: Вычисление производной сложной функции.

Цель занятия: закрепить знания и умения по нахождению производной сложной функции.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. *Непрерывность функции.*

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке а***, если она имеет предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и этот предел равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Пусть функция y = f(x) определена на промежутке X. Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Опр. 2.2. ***Производной*** функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пусть $z = f(x), y = \varphi(x) \Rightarrow z = f(\varphi(x))$ – композиция двух функций.

Теорема: Если функция $y = \varphi(x)$ дифференцируема по *x*, а функция $z = f(y)$ дифференцируема по *y*, то сложная функция $z = f(\varphi(x))$ дифференцируема по *x*, причем её производная вычисляется по формуле:

$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)]$, $y' = f_u' u_x'$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y_x' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_t'}{x_t'}$.
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $(v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x_y' = \dfrac{1}{y_x'}$, $(y_x' \neq 0)$.
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}$, $c = \text{const}$ $(v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция				
1	$C' = 0$	**6**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	**11**	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(u > 0)$
2	$x' = 1$	**7**	$(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	**12**	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**8**	$(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	**13**	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**9**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$	**14**	$(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**10**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$	**15**	$(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Примеры.

1) $((x^2-6x+5)^7)^/ = 7(x^2-6x+5)^6\cdot(x^2-6x+5)^/ = 7(x^2-6x+5)^6\cdot(2x-6)$;

2) $(sin^3x)^| = 3\cdot sin^2x\cdot(sinx)^/ = 3\cdot sin^2x\cdot cosx$;

3) $\left(\sqrt{2x^3+8x-5}\right)^/ = \frac{1}{2\sqrt{2x^3+8x-5}}(2x^3+8x-5)^/ = \frac{(6x^2+8)}{2\sqrt{2x^3+8x-5}} = \frac{2(3x^2+4)}{2\sqrt{2x^3+8x-5}}=\frac{(3x^2+4)}{\sqrt{2x^3+8x-5}}$;

4) $(\ln(cos3x))^/ = \frac{1}{cos3x}(cos3x)^/ = \frac{-3sin3x}{cos3x} = -3tg3x$;

5) $\left(7^{\sqrt{3x-1}}\right)^/ = 7^{\sqrt{3x-1}}ln7\left(\sqrt{3x-1}\right)^/ = 7^{\sqrt{3x-1}}ln7\frac{1}{2\sqrt{3x-1}}\cdot(3x-1)^/ = \frac{3\cdot 7^{\sqrt{3x-1}}ln7}{2\sqrt{3x-1}}$;

6) $\left(e^{tg\frac{1}{x}}\right)^/ = e^{tg\frac{1}{x}}\cdot\left(tg\,\frac{1}{x}\right)^/ = e^{tg\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^/ = e^{tg\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{tg\frac{1}{x}}}{x^2cos^2\frac{1}{x}}$;

7) $\left(arcsin\sqrt{x}\right)^/ = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^/=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$;

8) $(arctgx^2)^/ = \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot(x^2)^/ = \frac{1}{1+x^4}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$;

Задания для самостоятельного выполнения:

Вариант1.	**Вариант 2.**
а) $y=(5-2x)^7$; б) $y=\sqrt{3sinx+2}$; в) y=$ln(x^2-4x)$; г) y=$e^{\sqrt{x}}+ln3$; д) y=$\frac{1+sin3x}{1-sin3x}$; е) y=arctg2x.	а) $y=(8-3x)^5$; б) $y=\sqrt{2cosx+1}$; в) y=$ln(sin6x)$; г) y=$5^{x^2}+cos\,\frac{\pi}{12}$; д) y=$\frac{1+\ln(cosx)}{1-\ln(cosx)}$; е) y=arcsin4x.
Вариант 3.	**Вариант 4.**

а) y=$(3x+1)^4$; б) y=$\sqrt{lnx+2}$; в) y=$ln(cos4x)$; г) y=$e^{x^2-8x+3}+tg\frac{\pi}{5}$; д) y=$ln\frac{1-x}{1+x}$; е) y= $arccos^3x$.	а) $y=(1+2x)^9$; б) $y=\sqrt{tgx+2}$; в) y=$ln(x^3+x)$; г) y=$7^{\sqrt{x}}+tg3$; д) y= $\frac{1+e^{cosx}}{1-e^{cosx}}$; е) y=arcctg$x^2$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции.
2. Дайте определение сложной функции.
3. Напишите основные формулы дифференцирования.
4. В чем заключается геометрический и механический смысл производной.

Практическое занятие 3.

Тема: Вычисление неопределенных интегралов от основных элементарных функций.

Цель занятия: совершенствование умений находить неопределенные интегралы методом замены переменной и по частям, совершенствование умений проверять действие интегрирования дифференцированием.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

<u>ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ</u>

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C,$ где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C,$ где $F'(x)=f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x);\quad d\int f(x)dx=f(x)dx;$

2. $\int dF(x)=F(x)+C;$

3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,\qquad k$ — const;

4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du=C; \quad C=\text{const};$

2. $\int du=u+C;$

3. $\int u^{\alpha}du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq -1;$

3а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C;$

4. $\int \dfrac{du}{u}=\ln|u|+C;$

5. $\int a^{u}du=\dfrac{a^{u}}{\ln a}+C;$

6. $\int e^{u}du=e^{u}+C;$

7. $\int \cos u\,du=\sin u+C;$

8. $\int \sin u\,du=-\cos u+C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u}=\operatorname{tg}u+C;$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u}=-\operatorname{ctg}u+C;$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\dfrac{u}{a}+C;$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C;$

13. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a}+C;$

14. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|+C;$

15. $\int \dfrac{du}{\sin u}=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right|+C;$

16. $\int \dfrac{du}{\cos u}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C;$

17. $\int \operatorname{tg}u\,du=-\ln|\cos u|+C;$

18. $\int \operatorname{ctg}u\,du=\ln|\sin u|+C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

<u>Метод замены переменной</u>

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Пример1. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$a)\ \int\cos 4x dx;$ *б)* $\int e^{9x+1}dx;$ *в)* $\int x(2-x^2)^5\,dx$

Решение:

$$a)\ \int\cos 4xdx=\left|\begin{array}{c} t=4x \\ dt=(4x)'=4dx \\ dx=\dfrac{dt}{4}\end{array}\right|=\int\cos t\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int\cos tdt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 7}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin 4x+C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx=\left|\begin{array}{c} t=9x+1 \\ dt=(9x+1)'=9dx \\ dx=\dfrac{dt}{9}\end{array}\right|=\int e^t\frac{dt}{9}=\frac{1}{9}\int e^t dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 6}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{9}e^t+C=\frac{1}{9}e^{9x+1}+C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5dx=\left|\begin{array}{c} t=2-x^2 \\ dt=(2-x^2)'=-2xdx \\ xdx=\dfrac{dt}{-2}\end{array}\right|=\int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int t^5dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{t^6}{6}+C=-\frac{1}{12}(2-x^2)^6+C.$$

Интегрирование по частям

Если производные функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV=UV-\int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Вид интеграла	$U\to dU$	$dV\to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,\ldots$	$U=P_n(x)\to$ $\to dU=P_n'(x)dx$	$dV=\sin kx\,dx\to V=-\frac{1}{k}\text{co}$ $dV=\cos kx\,dx\to V=\frac{1}{k}\sin$ $dV=e^{kx}dx\to V=\frac{1}{k}e^{kx}$

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\, P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \dfrac{dx}{x}$	
$\int \arcsin kx\, P_n(x)dx$	$U = \arcsin kx \to dU = \dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU = -\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$
$\int \mathrm{arctg}\, kx\, P_n(x)dx$	$U = \mathrm{arctg}\, kx \to dU = \dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \mathrm{arcctg}\, kx\, P_n(x)dx$	$U = \mathrm{arcctg}\, kx \to dU = -\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n = 0,1,2,\ldots$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 2. Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1)\sin 2x dx$; *б*) $\int (1+2x)\ln x dx$.

Решение.

$$а)\ \int (3x-1)\sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \to dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \to V = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \int \frac{\cos 2x}{2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

$$б)\ \int (1+2x)\ln x dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \to dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \to \\ V = \int (1+2x)dx = x + x^2 \end{array} \right| = \ln x(x+x^2) - \int (x+x^2)\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x(x+x^2) - \int (1+x)dx = \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Проинтегрировать функции заменой переменной:

№ варианта	Задания		
	А)	Б)	В)
1	$\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$	$\int e^{1-3x}\,dx$
2	$\int (2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$	$\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$	$\int e^{6x+5}\,dx$
3	$\int 10^{2x+1}\,dx$	$\int \sin\frac{x}{2}\,dx$	$\int \frac{dx}{5x+3}$
4	$\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$	$\int \cos 2x\,dx$	$\int e^{\sin x}\cos x\,dx$
5	$\int \frac{dx}{x\ln x}$	$\int \sin 2x\,dx$	$\int 3^{7x-1}\,dx$
6	$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \sin(2-3x)dx$	$\int \frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 2. Найти интеграл методом интегрирования по частям

№ варианта	Задания	
	А)	Б)
1	$\int (7x-1)\cos x\,dx$	$\int \operatorname{arctg} x\,dx$
2	$\int (6-5x)e^x\,dx$	$\int (7x+5)\ln x\,dx$
3	$\int x\cos x\,dx$	$\int \operatorname{arcctg} x\,dx$

4	$\int(1+2x)\cos x\,dx$	$\int\arcsin x\,dx$
5	$\int(8x-1)\sin 5x\,dx$	$\int(6+5x)\ln x\,dx$
6	$\int xe^x\,dx$	$\int(3x+2)\ln x\,dx$

Контрольные вопросы:

1. Чем первообразная отличается от неопределенного интеграла?

2. Какими свойствами обладает неопределенный интеграл?

3. Формула вычисления неопределенного интеграла методом интегрирования по частям.

4. Как выбирать u и v при использовании метода интегрирования по частям?

5. В чем заключается суть метода замены переменной при вычислении интегралов?

Практическое занятие 4.

Тема: Вычисление определенных интегралов.

Цель занятия: Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Дифференциальное и интегральное исчисление».

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \quad [p \neq 1]$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

3. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} \quad [a \neq 0]$

4. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad [a \neq 0]$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) \quad [a \neq 0]$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2})| \quad [a \neq 0]$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} \quad [a \neq 0]$

8. $\int e^x dx = e^x$

9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad [a > 0, a \neq 1]$

Интегрирование произведения (функции) на постоянную:

$$\int (c \cdot f(x))dx = c\int f(x)dx, \text{ где c} - const$$

Интегрирование суммы функций:

$$\int (u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Где F(a),F(b)-значения первообразных в точках b и a соответственно.

Формула интегрирования по частям неопределенные интегралы:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Формула интегрирования по частям определенные интегралы:

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1 : Вычислить определенный интеграл

	1 вариант		2 вариант
1.	$\int_{-1}^{2} dx$	1.	$\int_1^2 x\,dx$
2.	$\int_0^3 5dx$	2.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$
3.	$\int_{-2}^{5} x dx$	3.	$\int_1^2 2x^2 dx$
4.	$\int_1^3 (x^3+4x)dx$	4.	$\int_1^4 (3-2x)dx$
5.	$\int_{-2}^{4} (8+2x-x^2)dx$	5.	$\int_{-3}^{1} (2x^2+3x-1)dx$
6.	$\int_2^4 (x^3-3x^2)dx$	6.	$\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} (8x+1)^2 dx$

Задание 2: Вычислить интеграл способом подстановки (замены переменной):

1	$\int_0^1 (x^3-1)^2 x^2\,dx$	1	$\int_2^3 (2x-1)^{\,3}\,dx$
2	$\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$	2	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$

Задание 3: Вычислить интеграл методом интегрирования по частям:

1	$\int_0^{\pi/4} x tg^2 x dx$	1	$\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}dx$
2	$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$	2	$\int_1^2 x\, e^x\, dx$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Дайте определение определенного интеграла.
3. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
4. Запишите геометрический смысл определенного интеграла.
5. Запишите основные формулы интегрирования.

Практическое занятие 5.

Тема: Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла.

Цель занятия: отработать навыки применения формул интегрирования при вычислении интегралов, навыки применения определенного интеграла к вычислению площадей и объемов фигур, ограниченных линиями

<u>Содержание отчета</u>

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:

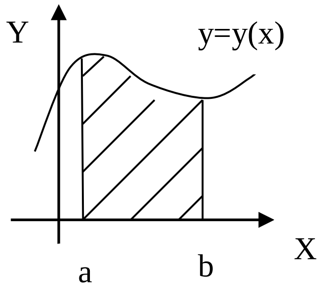


Рис.1

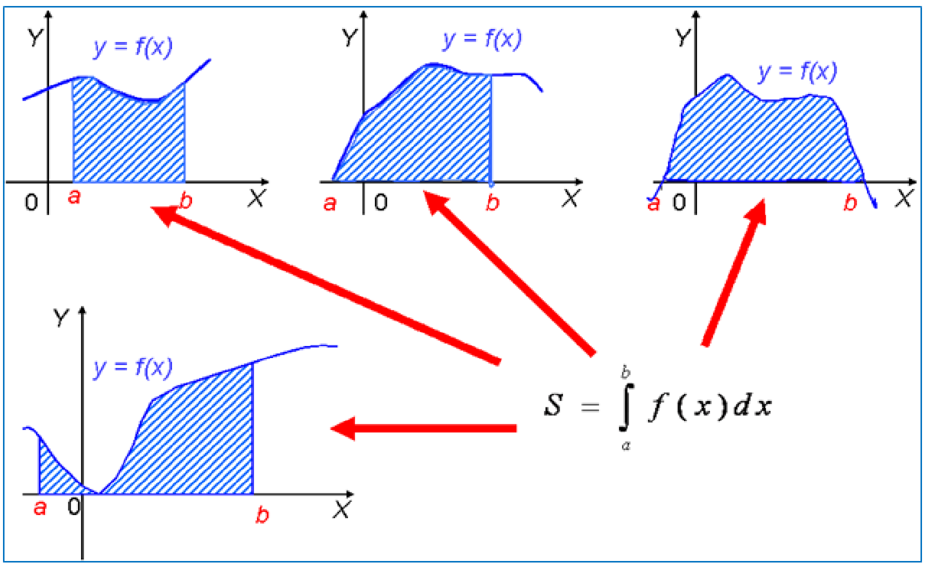
- сверху - графиком непрерывной функции $y=y(x)$
- снизу – осью OX ($y=0$)
- слева – прямой $x=a$
- справа – прямой $x=b$

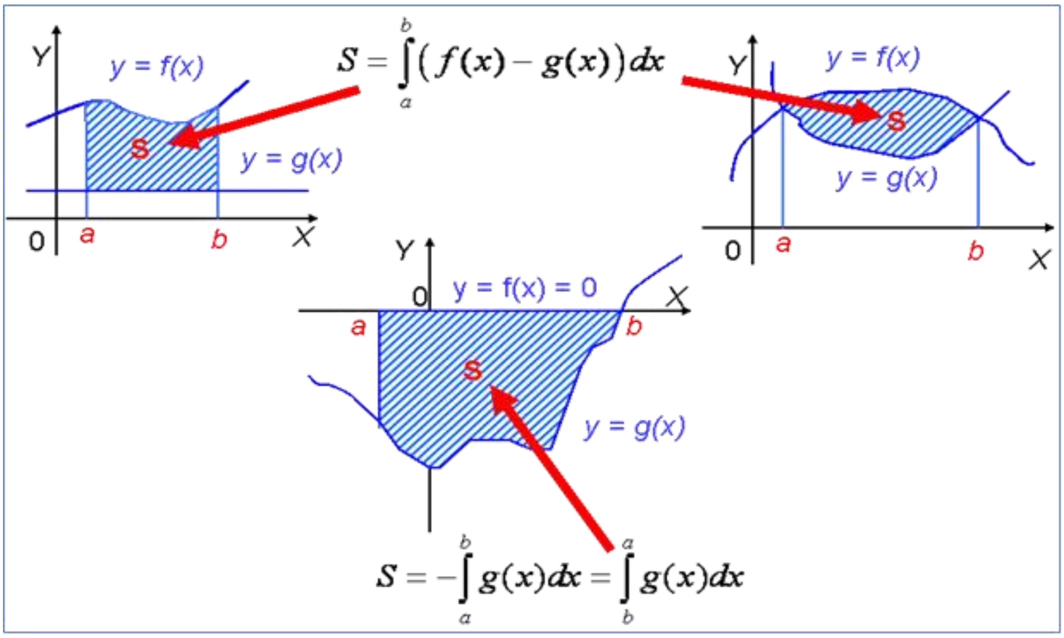
Утверждение. Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b y(x)dx$$

(1)

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.





Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

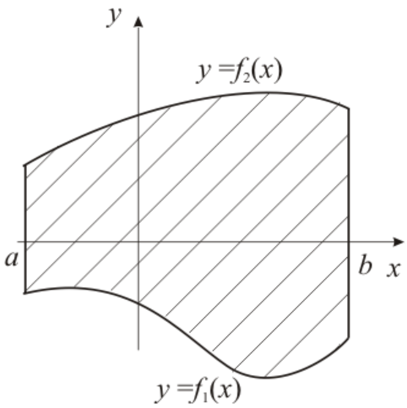


Рис. 1

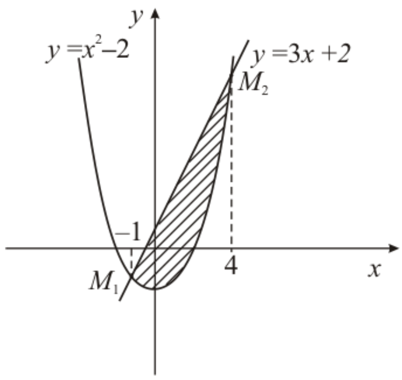


Рис. 2

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 2$, x=-1, x=2 и осью ОХ.

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

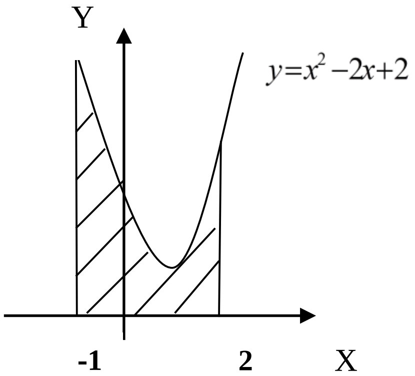


Рис. 2

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2}-\left.x^2\right|_{-1}^{2}+\left.2x\right|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)-\left(2^2-(-1)^2\right)+\left(2\cdot 2-2\cdot(-1)\right)=$$

$$=3-3+6=6.$$

Ответ: 6 кв.ед.

Пусть y=f(x) – непрерывная функция при $x\in[a, b]$, график которой расположен ниже оси OX (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

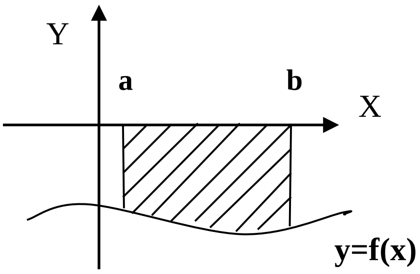


Рис. 3

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad \textbf{(2)}$$

Пример 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2-5x+6$ и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

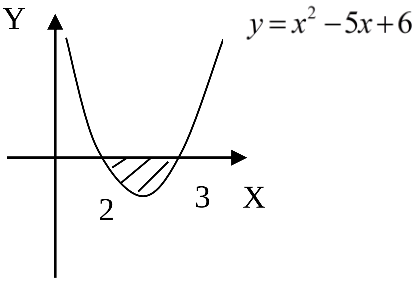


Рис. 4

$$S=\left|\int_2^3 (x^2-5x+6)dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}\Big|_2^3-\frac{5x^2}{2}\Big|_2^3+6x\Big|_2^3\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{5\cdot3^2}{2}-\frac{5\cdot2^2}{2}\right)+(6\cdot3-6\cdot2)\right|=$$

$$=\left|\frac{19}{3}-\frac{25}{2}+6\right|=\left|\frac{38-75+36}{6}\right|=\left|-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$$

Ответ: 1/6 кв.ед.

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2+1$ и $y=-x+3$.

Решение: данная фигура (рис. 5)представляет собой разность криволинейных трапеций

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: x_1=-2 и x_2=1.

$S=\int_{-2}^{1}(-x+3)dx-\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx$. Можно записать под один интеграл:

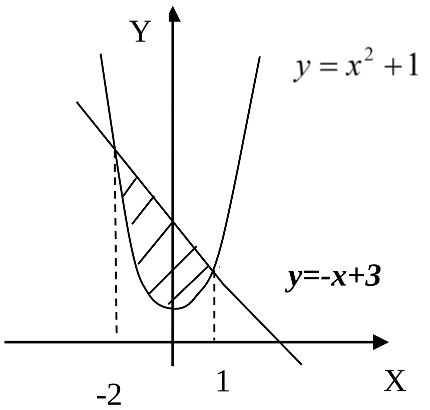


Рис. 5

$$S=\int_{-2}^{1}\left(-x+3-(x^2+1)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=$$

$$=2x\Big|_{-2}^{1}-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1}=(2\cdot1-2\cdot(-2))-\left(\frac{1^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}\right)=6-\left(-\frac{3}{2}\right)-3=4\frac{1}{2}$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

Пример 4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2+1$ и $y=-x+3$, и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций S=S_1+S_2, где $S_1=\int\limits_0^1 (x^2+1)dx$ и $S_2=\int\limits_1^3 (-x+3)dx$. Получим формулу:

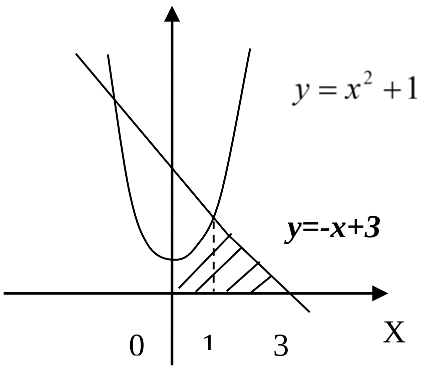


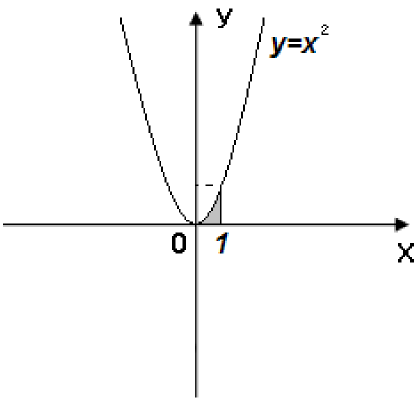
Рис. 6

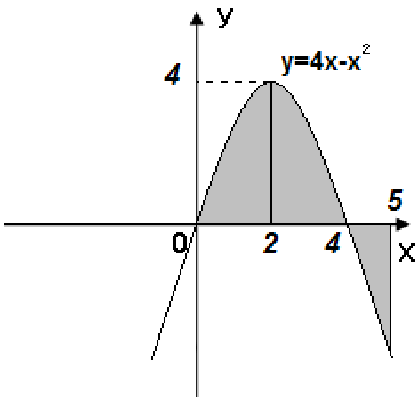
$$S=\int\limits_0^1 (x^2+1)dx+\int\limits_1^3 (-x+3)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.x\right|_0^1-\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3+\left.3x\right|_1^3=$$
$$=\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+(1-0)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^3}{2}\right)+(3\cdot 3-3\cdot 1)=$$
$$=\frac{1}{3}+1-4+6=3\frac{1}{3}$$

Ответ: $3\frac{1}{3}$ кв.ед.

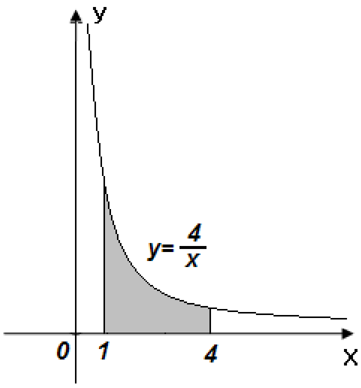
Задания для самостоятельной работы

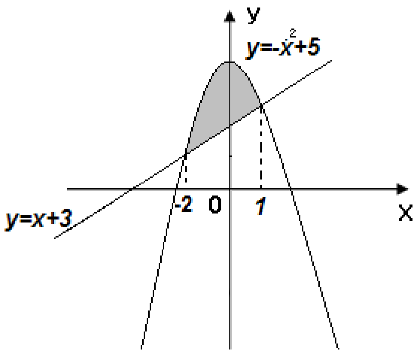
№1 Вычислить площадь:



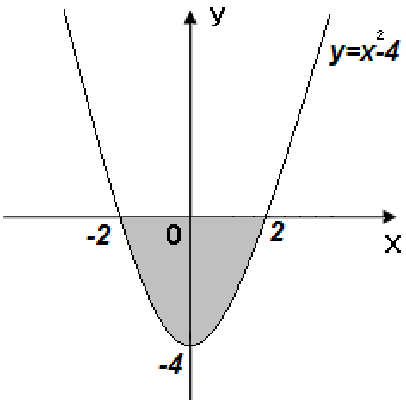


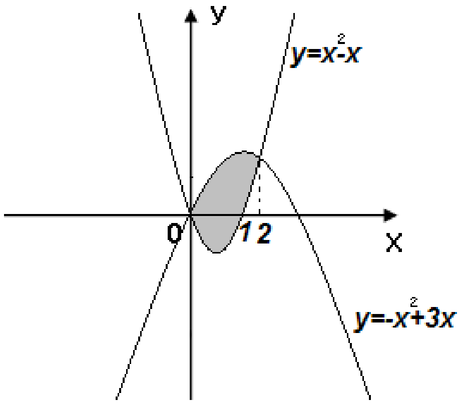
№2 Вычислить площадь:



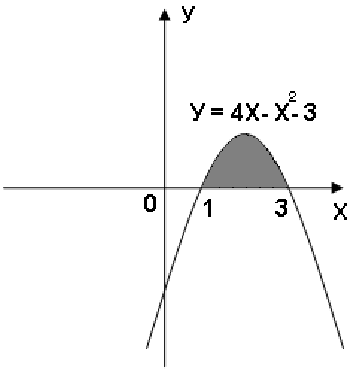


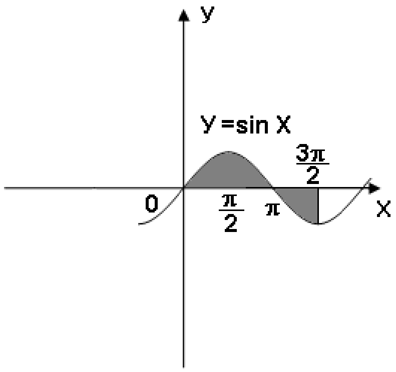
№3 Вычислить площадь :



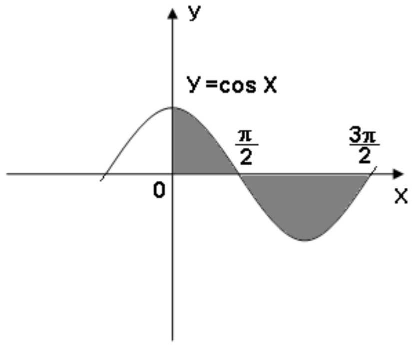


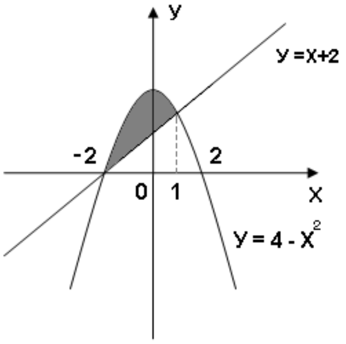
№4 Вычислить площадь:



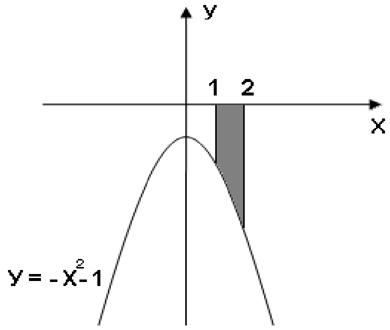


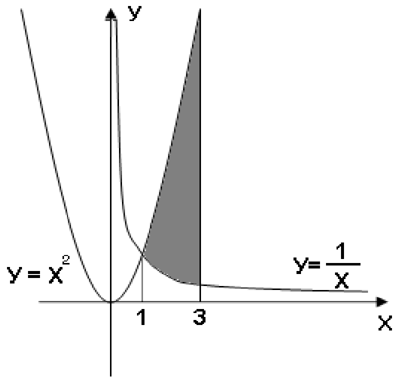
№5 Вычислить площадь:



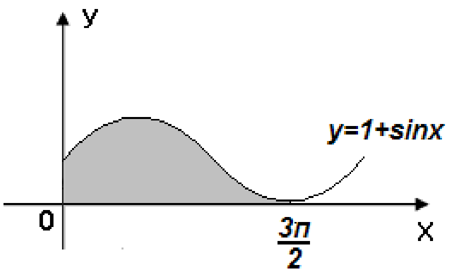


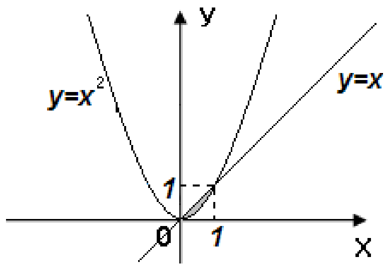
№6 Вычислить площадь:



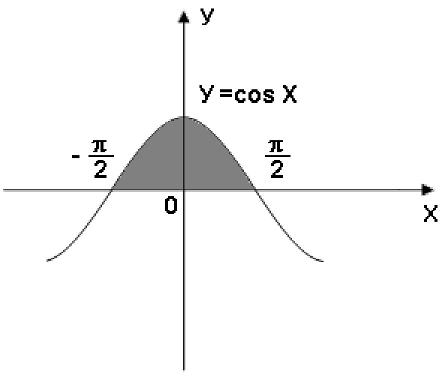


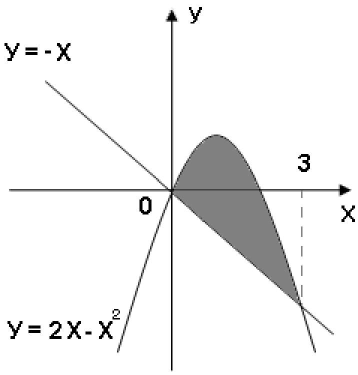
№7 Вычислить площадь:



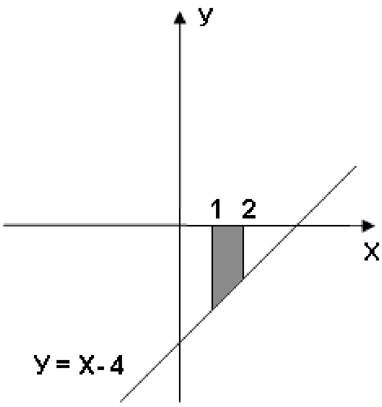


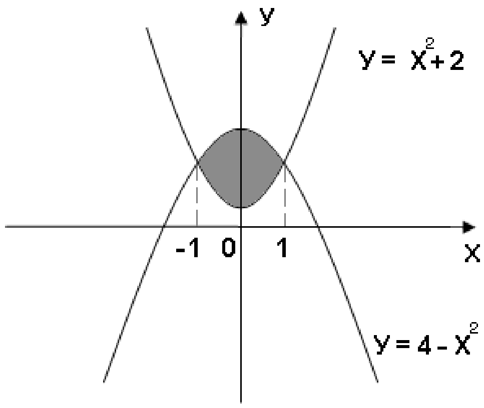
№8 Вычислить площадь:



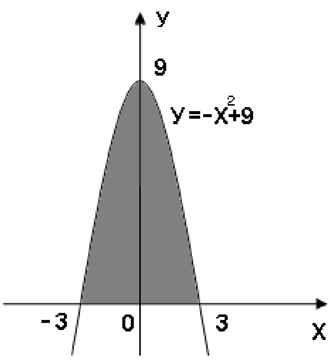


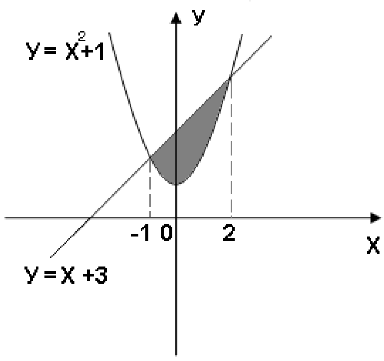
№ 9 Вычислить площадь:



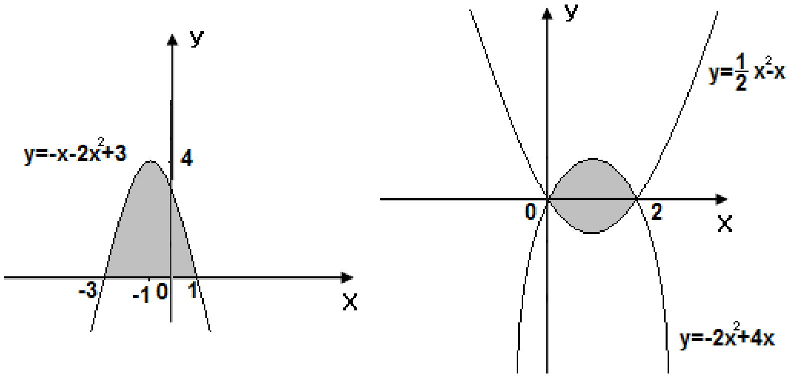


№10 Вычислить площадь:

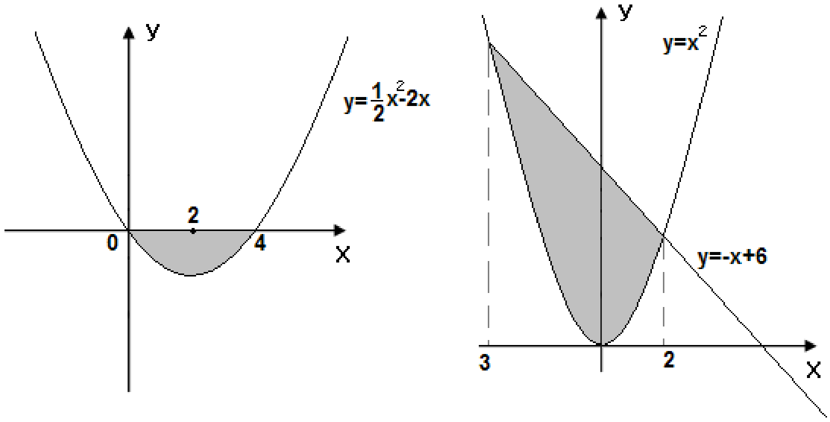




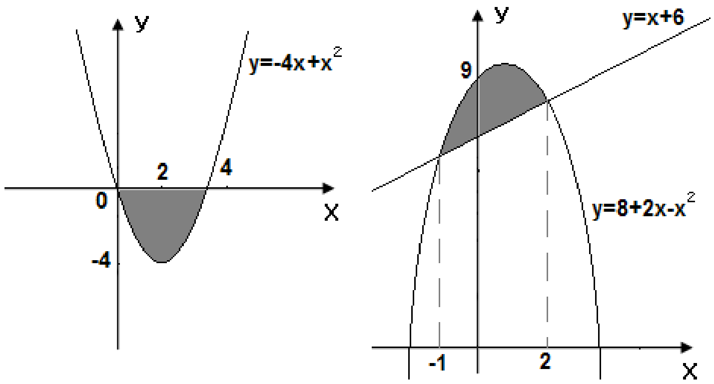
№11 ***Вычислить площадь:***



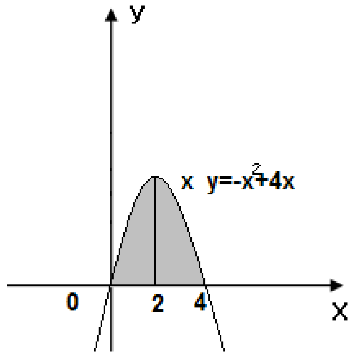
№12 ***Вычислить площадь:***

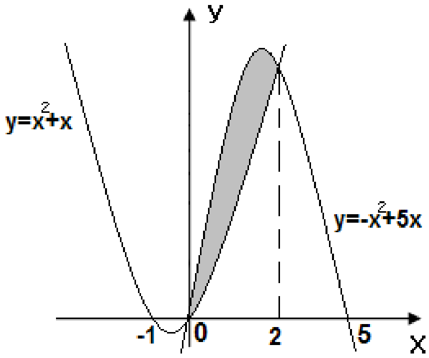


№13 ***Вычислить площадь:***

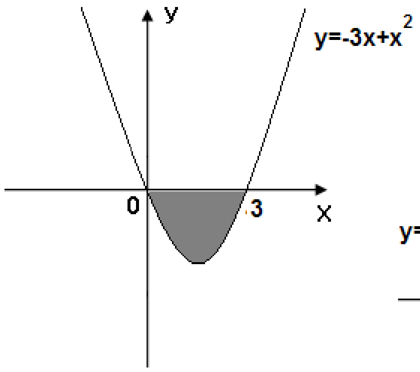


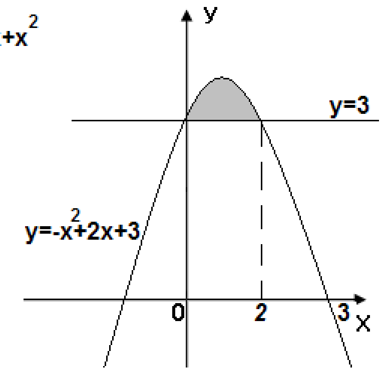
№14 Вычислить площадь:



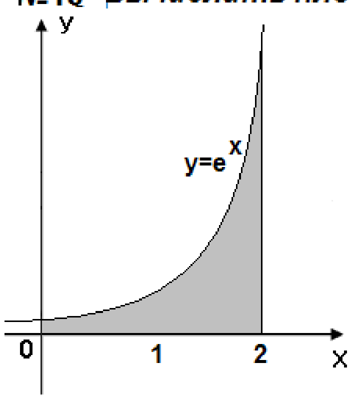


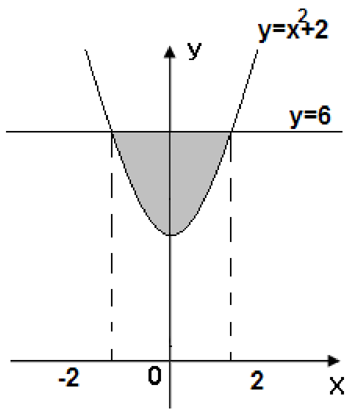
№15 Вычислить площадь:





№16 Вычислить площадь:





Контрольные вопросы:

1. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
2. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине?
3. Сформулируйте правило вычисления площади плоской фигуры.
4. Какой формулой пользуются при вычислении площади плоской фигуры?
5. Как вычислить площадь фигур, расположенных полностью или частично под осью OX?

Практическое занятие 6.

Тема: Операции над множествами

Цель занятия: овладеть навыками выполнения действий над множествами.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

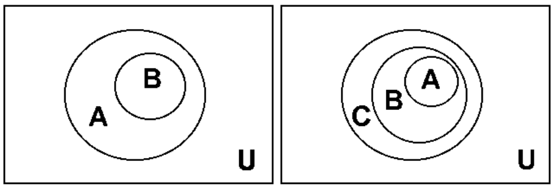
Одним из основных исходных понятий математики является понятие множества и его элементов. Множество состоит из элементов. Множества обозначаются большими латинскими буквами: A; B; C..., а их элементы – малыми буквами: a,b,c…

Если a является элементом множества A или, что то же самое, a принадлежит множеству A, то применяют запись $a \in A$; в противном случае пишут $a \notin A$.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов. Если множества A и B не равны, то применяется запись $A \neq B$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, в противном случае множество называется бесконечным. Конечное множество, содержащее n элементов, называется n-множеством.

Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается $\varnothing$. Все множества являются подмножествами некоторого множества U, называемого универсальным множеством.



а *б*

Рис. 1.

Для описания множества A, состоящего из элементов $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ обычно применяется запись $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$, причём порядок элементов в фигурных скобках не имеет значения; обычно он определяется соображениями наглядности.

Пример: В записи множества первых n натуральных чисел $N_n=\{1,2,\dots,n\}$ удобно располагать числа в возрастающем порядке, хотя при этом надо иметь в виду, что

$N_3=\{1,2,3\}=\{2,1,3\}=\{3,2,1\}$.

Другой способ задания множества состоит в описании свойств, однозначно определяющих принадлежность элементов данному множеству. Такому способу задания множества соответствует запись:

$A=\{a/a$ обладает свойством $P(a)\}$.

Пример: Множество чётных чисел M может быть задано так:

M={i / i – целое число, которое делится на 2 без остатка}.

В случае описания множества с помощью некоторого свойства необходимо следить за тем, чтобы каждый элемент был чётко определён. Так, например, недостаточно чётким является определение множества А как множества слов русского языка, если нет ссылки на один из толковых словарей.

Возможно также рекурсивное задание множества, при котором осуществляется последовательное описание элементов через предыдущие. Например, множество натуральных чисел рекурсивно можно задать так: $N=\{i$ / если целое $i \in N$, то $i+1 \in N$, $i \geq 1\}$.

Операции над множествами

1. Пересечением множеств А и В называется множество, состоящее их всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам А и В одновременно (обозначается: $A \cap B$). Используя характеристическое свойство, данное определение можно записать следующим образом:

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Графическая иллюстрация пересечения двух множеств приведена на рис 1.

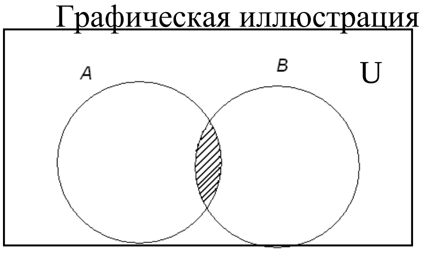


рис.1

2. Объединением двух множеств А и В называется такое множество, которое состоит из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В (обозначается: $A \cup B$). Данное определение можно записать с помощью характеристического свойства:

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

Графическая иллюстрация объединения двух множеств показана на рис. 2.

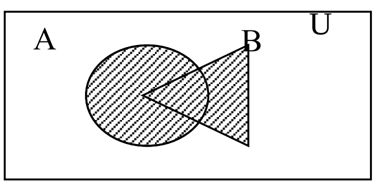


рис. 2

Отметим некоторые очевидные свойства операции объединения двух множеств:

$A\cup A=A$, $A\cup\varnothing=A$, $A\cup U=U$.

Замечание1.

Если $A_1, A_2,\ldots, A_n$ – несколько множеств, то аналогично тому, как это делалось для двух множеств, определяется их пересечение, т.е. составляется множество, представляющее их общую часть:

$P= A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\{x \mid x\in\forall A_i, i=\overline{1..n}\}$,

Замечание 2.

Если $A_1, A_2,\ldots, A_n$ – несколько множеств, то аналогично тому, как это делалось для двух множеств, определяется их объединение – составляется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному их них:

$C= A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\{x \mid x\in A_1$ или $x\in A_2$ или …или $x\in A_n\}$.

Замечание 3.

Если в выражении есть знаки $\cup$ и $\cap$ и нет скобок, то сначала выполняется операция пересечения, а потом – операция объединения (аналог сложению и умножению в арифметике).

3. Разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (обозначается: $A \setminus B$). С помощью характеристического свойства данное определение запишется следующим образом:

$$A \setminus B=\{x \mid x\in A \text{ и } x\notin B\} \quad (8)$$

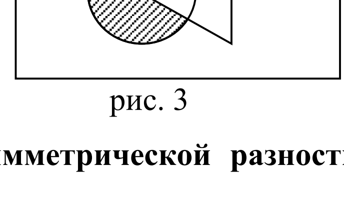


рис. 3

4. Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество, определенное характеристическом свойством:

$$A\Delta B = (A \setminus B)\cup(B \setminus A) = \{x \mid (x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\notin A \wedge x\in B)\}$$

Графическая иллюстрация симметрической разности двух множеств показана на рис. 4.

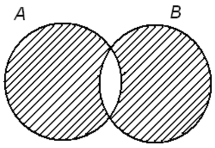


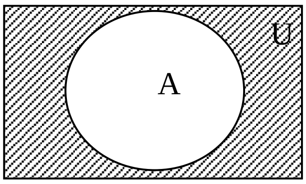
рис. 4

5. Пусть A – некоторое множество, являющееся частью универсального (основного) множества U. **Дополнением множества *A*** называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов их множества U, которые не принадлежат A. Его обозначают $\overline{A}$.

Это определение может быть записано в виде:

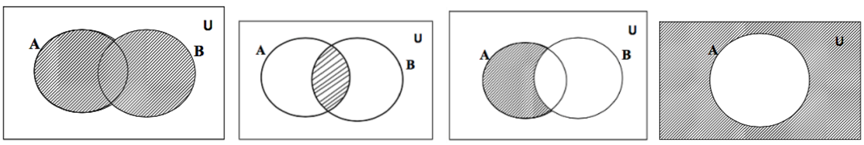
$$\overline{A} = \{x \mid x\notin A\}. \qquad (10)$$

Графически дополнение изображено соответственно, на которых дополнения заштрихованы.



Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U , а внутри него – кругов, представляющих множества.

• объединение A∪B • пересечение A∩B • разность A\B • дополнение A



Круги, которыми изображаются множества, называются **кругами Эйлера**.

<u>Пример:</u>

1. Найти $A\cup B; A\cap B; A\times B; B\times A; A\setminus B.$ $A=\{7;8;9\}; B=\{7;8;10\}$

Решение:

$$A \cup B = \{7;8;9\} \cup \{7;8;10\} = \{7;8;9;10\}$$
$$A \cap B = \{7;8;9\} \cap \{7;8;10\} = \{7;8\}$$
$$A \times B = \{7;8;9\} \times \{7;8;10\} = \{(7;7);(7;8);(7;10);(8;7);(8;8);(8;10);(9;7);(9;8);(9;10)\}$$
$$B \times A = \{7;8;10\} \times \{7;8;9\} = \{(7;7);(7;8);(7;9);(8;7);(8;8);(8;10);(10;7);(10;8);(10;9)\}$$
$$A \setminus B = \{7;8;9\} \setminus \{7;8;10\} = \{9\}.$$

<u>Пример:</u>В олимпиаде по математике приняло участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 20 человек, по геометрии – 18 человек, по тригонометрии – 18 человек. По алгебре и геометрии решили 7 человек, по алгебре и тригонометрии – 9 человек. Ни одной задачи не решили 3 человека. Сколько учащихся решили все задачи? Сколько учащихся решили только две задачи? Сколько учащихся решили только одну задачу?

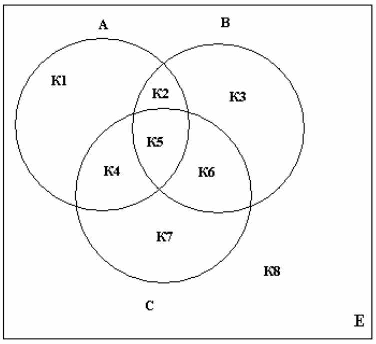
Решение:

Запишем коротко условие и покажем решение:

m(E) = 40; m(A) = 20; m(B) = 18; m(C) = 18; m(A∩B) = 7; m(A∩C) = 8; m(B∩C) = 9;

m(ABC) = 3 => m(ABC) = 40 – 3 = 37

Изобразим множества A, B, C.



К1 – множество учеников, решивших только одну задачу по алгебре;

К2 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и геометрии;

К3 – множество учеников, решивших только задачу по геометрии;

К4 – множество учеников, решивших только две задачи по алгебре и тригонометрии;

К5 – множество всех учеников, решивших все три задачи;

К6 – множество всех учеников, решивших только две задачи, по геометрии и тригонометрии;

К7 – множество всех учеников, решивших только задачу по тригонометрии;

К8 – множество всех учеников, не решивших ни одной задачи.

Используя свойство мощности множеств и рисунок можно выполнить вычисления:

$m(K5) = m(A \cap B \cap C) = m(ABC) - m(A) - m(B) - m(C) + m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C)$;

$m(K5) = 37\text{-}20\text{-}18\text{-}18+7+8+9=5$; $m(K2) = m(A \cap B) - m(K5) = 7\text{-}5 = 2$

$m(K4) = m(A \cap C) - m(K5) = 8\text{-}5=3$; $m(K6) = m(B \cap C) - m(K5) = 9\text{-}5 = 4$

$m(K1) = m(A) - m(K2) - m(K4) - m(K5) = 20\text{-}2\text{-}3\text{-}5 = 10$;

$m(K3) = m(B) - m(K2) - m(K6) - m(K5) = 18\text{-}2\text{-}4\text{-}5 = 7$;

$m(K7) = m(C) - m(K4) - m(K6) - m(K5) = 18\text{-}3\text{-}4\text{-}5 = 6$

$m(K2) + m(K4) + m(K6) = 2+3+4 = 9$ – число учеников решивших только две задачи;

$m(K1) + m(K3) + m(K7) = 10+7+6 = 23$ – число учеников решивших только одну задачу.

Ответ: 5 учеников решили три задачи; 9 учеников решили только по две задачи; 23 ученика решили только по одной задаче.

Задания для самостоятельной работы

1 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграмм Эйлера-Венна: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{4;6;8\}; B = \{6;10;14\}$

3. Даны множества M, P, T. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если

$M = \{3;7;8;6;0\};$ $P = \{x \mid x \in R; 0 < x \le 6\};$ $T = \{x \mid x \in R; 3 \le x < 7\}$.

Найдите его. Изобразите его с помощью кругов Эйлера.

4.Решите задачу:

Из сотрудников фирмы 16 побывали во Франции,10-в Италии,6-в Англии; в Англии и Италии-5; в Англии и Франции -6; во всех трех странах - 5 сотрудников. Сколько человек посетили и Италию, и Францию, если всего в фирме работают 19 человек, и каждый из них побывал хотя бы в одной из названных стран?

2 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграмм Эйлера-Венна: $A \cap (B \cup (A \cap C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{a;o;b\}; B = \{1;2;3\}$

3. Даны множества M, P, T. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если

$M = \{-2;-3;0;1;3;5\};$ $P = \{x \mid x \in R; -3 < x < 3\};$ $T = \{0;1;2;3;4;6\}$.

Найдите его. Изобразите его с помощью кругов Эйлера.

4. Решите задачу: В трёх группах 70 студентов. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 студентов из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько студентов не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько студентов заняты только спортом?

3 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграмм Эйлера-Венна: $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{a;b;c\}; B = \{d;e;f\}$

3. Даны множества M, P, T. Каким будет множество $S = (M \cap P) \setminus T$, если

$$M = \{x \mid x \in N; -5 \le x < 5\}; \quad P = \{x \mid x \in R; x \in (-1;3]\}; \quad T = \{x \mid x \in R; 5 \le x \le 7\}$$

Найдите его. Изобразите его с помощью кругов Эйлера.

4. Решите задачу: Первую или вторую контрольные работы по математике успешно написали 33 студента, первую или третью – 31 студент, вторую или третью – 32 студента. Не менее двух контрольных работ выполнили 20 студентов. Сколько студентов успешно решили только одну контрольную работу?

4 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграмм Эйлера-Венна: $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{3,7,11,d\}, B = \{7,11,d\},$

3. Даны множества M, P, T. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если

$$M = \{3;7;8;6;0\}; \quad P = \{x \mid x \in R; 0 < x \le 6\}; \quad T = \{x \mid x \in R; 3 \le x < 7\}.$$

Найдите его. Изобразите его с помощью кругов Эйлера.

4. Решите задачу: В магазине побывало 65 человек. Известно, что они купили 35 холодильников, 36 микроволновок, 37 телевизоров. 20 из них

купили и холодильник и микроволновку, 19 - и микроволновку, и телевизор, 15-холодильник и телевизор, а все три покупки совершили три человека. Был ли среди них посетитель, не купивший ничего?

Контрольные вопросы

1.Что понимают под множеством?

2.Способы задания множеств.

3. Какое множество называют пустым?

4. Какое множество называют универсальным?

5. Охарактеризуйте действия над множествами.

Практическое занятие 7.

Матричное задание графов, их метрические характеристики

Цель занятия: закрепить и систематизировать знания по построению графа по условиям ситуационных задач.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

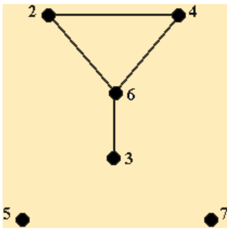
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Граф- это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек.

Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются **смежными**.

Если ребра ориентированны, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами, и граф с такими ребрами называется **ориентированным графом**.

Если ребра не имеют ориентации, граф называется **неориентированным.**



Петля- это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.

Простой граф- граф без кратных ребер и петель.

Степень вершины- это удвоенное количество петель, находящихся у этой вершины плюс количество остальных прилегающих к ней ребер.

Пустым называется граф без ребер.

Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

Путь в ориентированном графе — это последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.

Маршрут в графе путь, ориентацией дуг которого можно пренебречь.

Цепь- маршрут, в котором все ребра попарно различны.

Цикл- замкнутый маршрут, являющийся цепью.

Граф называется **связным**, если любая пара его вершин связана.

Дерево — это связный граф без циклов.

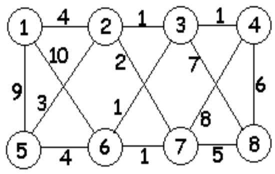
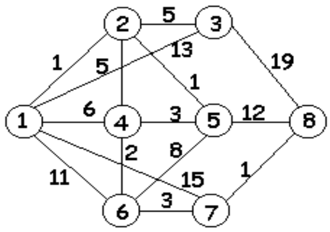
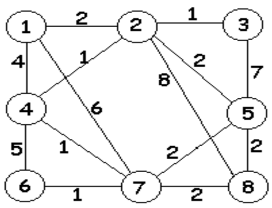
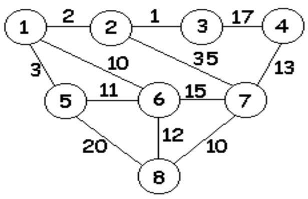
Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1: Выполните задание по теме: Граф и его элементы.

А) Запишите количество ребер и вершин графа;

В) Определить кратчайший путь из вершины 1 в вершину 8 для графа, представленного на рисунке;

С) Запишите номера вершин, имеющих одинаковую степень:

<table>
<tr><td>1.</td><td></td><td rowspan="3">4.
</td></tr>
<tr><td>2.</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td></td></tr>
</table>

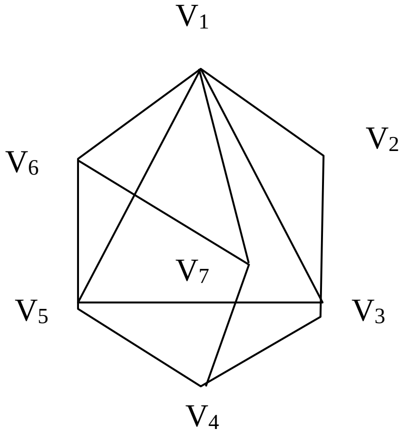
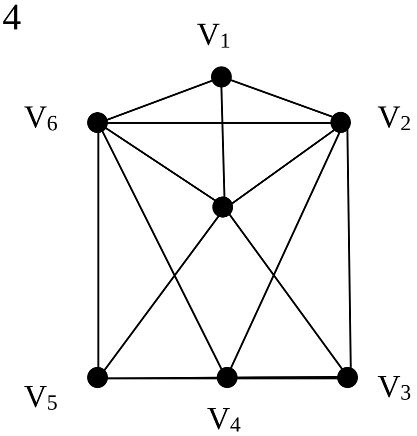
Задание 2: Выполните задание по теме: Граф и его элементы.

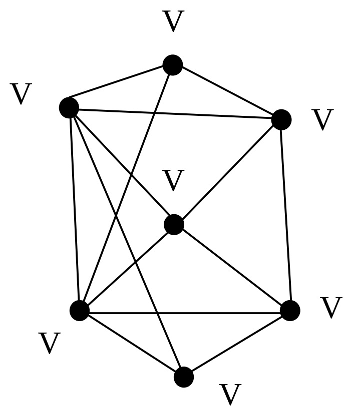
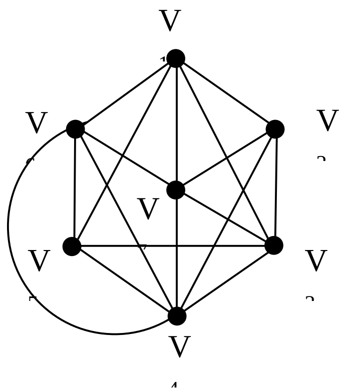
Граф задан диаграммой.

А) Составьте маршруты длины 5 из вершиныV_2 в вершину V_5. Составьте простую цепь, соединяющую эти вершины.

В) Постройте простой цикл, содержащий вершину V_4.

С) Определите вид заданного графа

<table>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>4

</td></tr>
</table>

2		
3		

Задание 3: Выполните задание по теме: Понятие дерева в теории графов:

1	Сколько различных способов обедов можно выбрать в вагоне-ресторане, если бы на каждый обед выбирать одно холодное блюдо, одно первое, одно второе, одно третье? В меню на этот раз были выставлены студень, красная икра, свежепосоленная рыба; на первое – уха из стерляди, щи с грибами; на второе – осетрина жаренная, теленок жареный на вертеле; на третье – арбузы, груши.
2	Изобразите дерево возможных исходов при троекратном бросании монеты.
3	Нарисуйте граф с семью вершинами, в котором для любых двух вершин существует только один связывающий их путь.
4	Перечислите все возможные сочетания деловой одежды, если у вас в

	гардеробе брючный костюм черного цвета, белая и голубая блузки, синяя юбка и серый джемпер.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение графа.
2. Что называется петлей в графе?
3. Какой граф называется ориентированным?
4. Приведите примеры применения графов в окружающем мире.

Практическое занятие 8.

Операции над матрицами и определителями

Цель: закрепить навыки выполнения действий над матрицами: сложения матриц, умножения матриц, нахождения определителей при выполнении заданий.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$

A- матрица, a_{mn}- элемент матрицы, m- номер строки, n- номер столбца, в которой расположен данный элемент. Числа m,n называют **размерностями** матрицы.

Матрица называется **квадратной**, если m=n. Число n называют порядком квадратной матрицы.

Матрицы одинаковой размерности называются **равными**, если у них соответственно равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны нулю.

Квадратная матрица называется **единичной**, если элементы, стоящие на ее главной диагонали, равны 1, а остальные равны нулю.

Суммой (разностью) матриц A и B одинаковой размерности m×n называется матрица C той же размерности, каждый элемент которой равен сумме (разности) элементов матрицы A и B, стоящих на тех же местах.

Пример: A=$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$. Найти A+B, A-B.

Решение: A+B=$\begin{pmatrix} 1+8 & 5+1 \\ 4-9 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

A-B=$\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 13 & -2 \end{pmatrix}$

Произведением матрицы на число называется матрица той же размерности что и искомая, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженными на данное число.

Пример: A=$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти 5*A

Решение 5A=$\begin{pmatrix} 25 & 5 \\ -10 & 35 \end{pmatrix}$

Произведением матрицы $\mathrm{A} = (a_{ij})$, имеющей m строк и k столбцов, на матрицу $\mathrm{B} = (b_{ij})$, имеющую k строк и n столбцов, называется матрица $\mathrm{C} = (\mathrm{c}_{ij})$, имеющая k строк и n столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Пример:

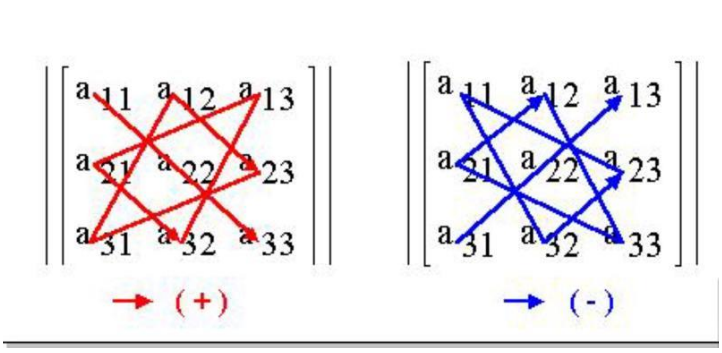
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0*1+1*0+0*1 & 0*0+1*1+0*0 & 0*1+1*0+0*1 \\ 1*1+0*0+1*1 & 1*0+0*1+1*0 & 1*1+0*0+1*1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Квадратной матрице А порядка n можно сопоставить число, называемое определителем, следующим образом:

1. n=1, A=(a_1); $\Delta A = a_1$
2. n=2, A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. n=3, A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$

   $a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$

При вычислении определителя третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или правилом Саррюса), которое символически можно записать так:



Свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.
2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.
3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

4. Общий множитель элементов какого – либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Минором некоторого элемента (a_{ij}) определителя n-го порядка называется определитель n-1-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}.

Так, если $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $m_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, m_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

Алгебраическим дополнением элемента (a_{ij}) определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма i+j- четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}: $A_{ij}=(-1)^{i+j}*m_{ij}$

Пример: Вычислить определитель матрицы

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}=3*\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}+1*\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}+0*\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}-1*\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}=$$

3*(7*3*4+(-1)*0*2+5*7*1-(-1)*3*1-7*7*2-5*0*4)+(5*3*4+(-1)*7*2+5*7*8-(-1)*3*8-5*7*4-5*7*2)-(5*0*2+7*1*5+7*3*8-5*0*8-3*1*5-7*7*2)=122

Квадратная матрица А называется **невырожденной**, если определитель ее не равен нулю, в противном случае матрица называется **вырожденной**.

Матрица A^{-1} называется **обратной** матрице А, если выполнено условие: $A*A^{-1}=A^{-1}*A=E$, Е – единичная матрица того же порядка, что и матрица А.

Пример: Найти матрицу С

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 7 & 20 & -7 \\ 21 & 17 & 6 \end{pmatrix} - 3C = 2 * \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3C=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 7 & 20 & -7 \\ 21 & 17 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ -2 & 8 & 14 \\ 6 & 20 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3C=\begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ 9 & 12 & -21 \\ 15 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти значение матричного выражения:

Вариант 1	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$ Найти $AB - 2C$
Вариант 2	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Найти 3A-BC
Вариант 3	$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Найти AB+3CD
Вариант 4	$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ Найти AB-5C

2. Вычислить определители

Вариант 1	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ x & 3 & x \end{vmatrix}$

Вариант 2	$\begin{vmatrix}2 & 8\\8 & 7\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 8 & 1\\9 & 7 & 5\\3 & 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 8 & 1 & 4\\9 & 7 & 5 & 3\\3 & 2 & 1 & 6\\0 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x & x & 3\\x & 4 & 5\\2 & 1 & 2\end{vmatrix}$
Вариант 3	$\begin{vmatrix}3 & 7\\9 & 6\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 7 & 1\\9 & 6 & 2\\3 & 5 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 7 & 1 & 2\\9 & 6 & 2 & 1\\3 & 5 & 4 & 8\\1 & 2 & 5 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x & 0 & 1\\1 & x & 2\\4 & x & 3\end{vmatrix}$
Вариант 4	$\begin{vmatrix}7 & 3\\2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}7 & 3 & 1\\2 & 1 & 4\\8 & 3 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}7 & 3 & 1 & 5\\2 & 1 & 4 & 8\\8 & 3 & 2 & 6\\1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x & x & 2\\1 & 3 & x\\2 & 4 & 5\end{vmatrix}$

3. Найти матрицу С:

Вариант 1	$\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\1 & 1 & 3\\4 & 0 & 2\end{pmatrix} + 2C = 3 * \begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\1 & -1 & 5\\2 & 4 & 6\end{pmatrix}$
Вариант 2	$\begin{pmatrix}2 & 3 & -11\\-7 & -8 & -15\\-7 & 1 & 34\end{pmatrix} + 3C = 2 * \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\-2 & -1 & 3\\4 & 2 & 5\end{pmatrix}$
Вариант 3	$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\2 & 5 & 0\\-1 & 0 & 7\end{pmatrix} - 2C = \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\2 & 3 & 4\\1 & -2 & 15\end{pmatrix}$
Вариант 4	$\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\2 & 3 & 4\\1 & -2 & 15\end{pmatrix} + 2C = 3 * \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\-2 & 5 & 0\\-1 & 0 & 7\end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Понятие матрицы
2. Элемент матрицы.
3. Порядок нахождения обратной матрицы
4. Вычислить матрицу, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$$

5. Какое применение определителей Вы знаете?

Практическое занятие 9.

Решение систем линейных уравнений методами Крамера

Цель: сформировать умение исследовать и использовать метод Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел (k_1, k_2, …, k_n), которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*. Рассмотрим два способа решения системы: метод Крамера и метод Гаусса.

Метод Крамера

При решении методом Крамера используем определители n-го порядка. Пусть задана система (1). Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то систему (3) можно решить по формуле Крамера, причем это решение единственное:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad \dots; \qquad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

где определитель Δx_i может быть получен из главного определителя путем замены i -го столбца на столбец из свободных членов.

<u>Пример 1</u>.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}.$$

Составляем главный определитель, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

и три вспомогательных определителя:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δx_1 составлен из определителя Δ путем замены элементов первого столбца свободными членами системы уравнений. В определителях Δx_2 и Δx_3 соответственно второй и третий столбцы заменены свободными членами. Вычислим все четыре определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5+12+21+10-21+6=33;$$

$$\Delta\, x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20+48+7+40-84+2=33;$$

$$\Delta\, x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1+24+24-2-24+12=33;$$

$$\Delta\, x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40+4+84+40-7-48=33.$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находим по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_1 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_2 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_3 = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

<u>Пример2</u>. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение

Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22) - 4(12+6) - 1(33-33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22) - (-1)(33-33) + 4(-6-12) = 60.$$

По теореме Крамера $x_1 = \dfrac{|A|_1}{|A|} = \dfrac{180}{60} = 3$; $x_2 = \dfrac{|A|_2}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$;

$x_3 = \dfrac{|A|_3}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$. Ответ: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

<u>Условия неопределенности и несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными.</u>

Если определитель системы $\Delta = 0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta_{x_1} \neq 0$ и $\Delta_{x_2} \neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta_{x_1} = 0$ и $\Delta_{x_2} = 0$). В

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения. *Условия несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:*

Условия неопределенности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Если один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система уравнений (1) не имеет решения (если $\Delta = 0$).

Если главный и все вспомогательные определители равны нулю, то система (1) имеет бесконечно много решений.

Если главный определитель отличен от нуля, то система уравнений (1) имеет единственное решение.

Задания для самостоятельной работы

Решить систему уравнений по формулам Крамера:

Вариант 1

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 32 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Вариант2

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
2. Какие бывают виды систем линейных уравнений?
3. Дайте определение общего решения системы линейных уравнений.
4. Дайте определение частного решения системы линейных уравнений.
5. В каком случае система линейных уравнений будет иметь одно решение, бесконечно много решений, не иметь решений?

Практическое занятие 10.

Решение двух систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: сформировать умение исследовать и использовать метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса.

Идея метода Гаусса состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

Решение

В результате элементарных преобразований добиваются того, чтобы в последнем уравнении системы осталось одно неизвестное (z), во втором – 2 неизвестных (y и z), а в первом – 3 неизвестных (x, y, z). За ведущее уравнение берется то, в котором коэффициент при x равен 1. Если такого уравнения нет, то его легко получить, разделив любое из уравнений системы на коэффициент при x.

Ведущим уравнением данной системы будет последнее. Перепишем систему так:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \quad (2) \\ 5x+3y-z=7 \end{cases}$$

Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, чтобы избавиться от x во втором уравнении. Результат сложения записываем на месте второго уравнения. Далее первое уравнение умножаем на (-5) и складываем с третьим, чтобы избавиться от x в третьем уравнении. Результат записываем на месте третьего уравнения. Первое уравнение при этом переписываем без изменений. Получим:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -7y-16z=2 \quad (3) \\ -7y-4z=7 \end{cases}$$

Системы уравнений (2) и (3) эквиваленты, т. е. они обе несовместны, или же обе совместны и имеют одни и те же решения.

Умножаем второе уравнение системы (5) на (-1) и складываем с третьим, чтобы избавиться от y в третьем уравнении. Первое уравнение при этом не трогаем. Результат записываем на месте третьего уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -7y-16z=2\,. \\ 12z=5 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $z = \frac{5}{12}$. Подставляем это значение z во втрое уравнение системы и находим y:

$$-7y - 16 \cdot \frac{5}{12} = 2$$

$$y = -\frac{26}{11}.$$

В первое уравнение подставляем значения z и y, получаем

$$x + 2 \cdot \left(-\frac{26}{11}\right) + 3 \cdot \frac{5}{12} = 1$$

$$x = \frac{187}{84}.$$

Ответ: $x = \frac{187}{84}$; $y = -\frac{26}{11}$; $z = \frac{5}{12}$.

Рекомендуется сделать проверку.

Задания для самостоятельной работы

Решить систему уравнений с помощью метода Гаусса:

Вариант 1

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 32 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Вариант2

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Контрольные вопросы

В чем заключается метод Гаусса при решении систем уравнений?

Практическое занятие 11.

Тема: Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической формах

Цель занятия: формирование навыков выполнения перехода от алгебраической формы комплексного числа тригонометрической и обратно, навыков выполнения действий над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Запись комплексного числа z в виде $z = x + yi$ называется алгебраической формой комплексного числа.

$z=a+bi$ – алгебраическая форма,

a – действительная часть, bi – мнимая.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме:

$z_1+z_2= (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$

$z_1*z_2=(a_1a_2 - b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2)^2+(b_2)^2}.$

Возведение комплексного числа в степень производится по формулам возведения двучлена в степень, но при этом надо учитывать, что:

$i^0=1$	$i^{4n}=1$
$i^1=i$	$i^{4n+1}=i$
$\boldsymbol{i^2=-1}$	$i^{4n+2}=-1$
$i^3=-i$	$i^{4n+3}=-i$

<u>Пример</u>. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 7i$. Найти:

а)$z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) z_1z_2.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = 2 + 3i + 5 - 7i = (2 + 5) + (3i - 7i) = 7 - 4i$;

б) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = (2 - 5) + (3i + 7i) = -3 + 10i$;

в) $z_1z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 17i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = (10 + 21) + (-14i + 15i) = 31 + i$

(здесь учтено, что $i^2 = -1$).

<u>Пример</u>. Выполнить действия:

а) $(2 + 3i)^2$; б) $(5 + 3i)^3$.

Решение.

а) $(2 + 3i)^2 = 4 + 2\times2\times3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$;

б) $(5 + 3i)^3 = 125 + 3\times25\times3i + 3\times5\times9i^2 + 27i^3$;

так как $i^2 = -1$, а $i^3 = -i$, то получим $(5 + 3i)^3 = 125 + 225i - 135 - 27i = -10 + 198i$.

Переход от алгебраической формы записи к тригонометрической и обратно осуществляется по формулам:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; \quad tg\varphi = tg(\arg z) = \frac{y}{x}; \quad x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi.$$

Для представления комплексного числа $z = x + yi$ в тригонометрической форме необходимо найти: 1) модуль этого числа; 2) одно из значений аргумента этого числа. В силу многозначности $\arg z$ тригонометрическая форма комплексного числа также неоднозначна.

Произведение комплексных чисел $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ находится по формуле:

$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ то есть

$|z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$.

Таким образом, *при умножении двух комплексных числе, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Частное комплексных чисел $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ находится по формуле:

$\dfrac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, то есть

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg\dfrac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Таким образом, *при делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, аргументы вычитаются.*

При возведении комплексного числа $r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в n-ую степень используется формула

$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in Z$,которая называется формулой Муавра.

Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа $r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используется формула

$$z_k = \sqrt[n]{r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Степень e^z с комплексным показателем $z = x + yi$ определяется равенством

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n .$$

Примеры

Задание 1: Представить в тригонометрической форме числа:

1) $6i$; 2) $-2+2\sqrt{3}i$.

Решение: 1) Здесь $a = 0$, $b = 6$, $r = 6$. Поскольку вектор, изображающий число $6i$ лежит на положительной полуоси Oy, главное значение аргумента $\varphi = \frac{\pi}{2}$ поэтому $6i = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ или

$$6i = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right], \quad k \in Z .$$

2) Здесь $a = -2$, $b = 2\sqrt{3}$, $r = 4$. Точка, изображающая число z, лежит во II четверти; $tg\varphi = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Значит, $-2+2\sqrt{3}i = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

или $-2+2\sqrt{3}i = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\right], \quad k \in Z$.

Задание 2: Представить в алгебраической форме числа:

1) $z = 2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$; 2) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Решение: 1) Подставив значения $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$ в данное равенство, получим $z = 2(1 + i\cdot 0) = 2$.

2) Имеем $z=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=-1+i$.

Задание 4: Выполните действия:

1) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$;

Решение: 1) По формуле умножения комплексных чисел заданных в тригонометрической форме получим

$$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$
$$=2\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right]=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}.$$

Задание 5: Возвести в степень $\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$.

Решение: По формуле Муавра получим

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^6=\cos\left[6\cdot\frac{\pi}{6}\right]+i\sin\left[6\cdot\frac{\pi}{6}\right]=$$
$$=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1	Вариант2
№1. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме $z_1+z_{2,}z_1\cdot z_{2,}z_1:z_2$, если	
$z_1=\frac{1}{2}i,\ \ z_2=3+3i$	$z_1=\frac{1}{3}i, z_2=2+2i$
№2. Запишите комплексное число в алгебраической форме	

Z=$\sqrt{3}(\cos\frac{П}{3} + i\sin\frac{П}{3})$	Z=$2(\cos\frac{П}{6} + i\sin\frac{П}{6})$
№3. Выполните действия над комплексными числами в тригонометрической форме $z_1 + z_{2,} z_1 \cdot z_{2,} z_1 : z_2$, если	
$z_1 = 2(\cos\frac{П}{2} + i\sin\frac{П}{2})$, $z_2 = 3(\cos\frac{П}{2} + i\sin\frac{П}{2})$	$z_1 = 3(\cos\frac{П}{6} + i\sin\frac{П}{6})$, $z_2 = 2(\cos\frac{П}{3} + i\sin\frac{П}{3})$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Какие числа называются комплексно – сопряженными?
3. Какие комплексные числа называются равными?
4. Дайте определение тригонометрической формы комплексного числа.
5. Как умножаются и делятся комплексные числа, заданные в тригонометрической форме?
6. Как возводится в степень комплексное число, заданное в тригонометрической форме?

Практическое занятие 12.

Тема: Применение определения классической вероятности к решению задач

Цель занятия: вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием

3. Ответы на контрольные вопросы

4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Размещения: Комбинации из **n** элементов по **m** элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются ***размещениями.***

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Сочетания: Комбинации из **n** элементов по **m** элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, называются **сочетаниями**

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Перестановки: Комбинации из **n** элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются ***перестановками.***

$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух **основных правил** - правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если некоторый объект **A** можно выбрать **n** способами, а другой объект **B** можно выбрать **m** способами, то выбор "**либо A, либо B**" можно осуществить **m+n** способами.

Правило произведения. Если объект **A** можно выбрать **n** способами, а после каждого такого выбора другой объект **B** можно выбрать (независимо от выбора объекта А **m** способами, то пары объектов **A и B** можно $n * m$ способами.

Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A_1 к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т.е. $0 \le P(A) \le 1$

Невозможному событию соответствует вероятность P(A)=0, а достоверному – вероятность P(A)=1

Образцы решения задач

Задача 1.

В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение: Событие А-билет выигрышный. Общее число различных исходов есть n=1000

Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле $P(A)=\frac{m}{n}$, получим $P(A)=\frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Задача 2.

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Решение: Событие А-появление черного шара. Общее число случаев n=5+3=8

Число случаев m, благоприятствующих появлению события А, равно 3

$P(A)= \frac{m}{n} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

Задача 3.

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение: Событие А- появление двух черных шаров. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по 2

$n=C_{20}^{2}= \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$

Число случаев m, благоприятствующих событию A, составляет

$n=C_2^8=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28$ P(A)= $\frac{m}{n}=\frac{28}{190}=\frac{14}{95}=0{,}147$

Пусть, например, событие A состоит в том, что изделие удовлетворяет стандарту; тогда противоположное событие $\bar{A}$ заключается в том, что изделие стандарту не удовлетворяет. Пусть событие A— выпадение четного числа очков при однократном бросании игральной кости; тогда A— выпадение нечетного числа очков.

Задача №4 .Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,19. Покупатель в магазине выбирает одну такую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

Решение:

Вероятность того, что ручка пишет хорошо равна 1 − 0,19 = 0,81.

Задача №5. В урне 2 зеленых, 7 красных, 5 коричневых и 10 белых шаров. Какова вероятность появления цветного шара?

Решение: Находим соответственно вероятности появления зеленого, красного и коричневого шаров:

P(зел.)=2/24; P(кр.)=7/24; P(кор.)=5/24. Так как рассматриваемые события, очевидно, несовместны, то, применяя аксиому сложения, найдем вероятность появления цветного шара:

$$P(цв.)=P(зел.)+P(кр.)+P(кор.)=\frac{2}{24}+\frac{7}{24}+\frac{5}{24}=\frac{7}{12}$$

Задания для самостоятельного выполнения:

1 вариант.

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В цехе работают 10 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы 2 шара оказались белыми, а один черным?
4. Отдел технического контроля обнаружил 15 бракованных ламп в партии из случайно отобранных 200 ламп. Найти относительную частоту появления бракованных ламп.
5. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,8. найти число годных приборов, если всего было проверено 250 приборов.

2 вариант.

1. В урне имеется 20 шаров, среди которых 12 красного цвета. Из урны наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что извлеченные шары не красные.
2. В партии из 15 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 2 стандартных.
3. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно избрать трех юношей и двух девушек для участия в слете студентов?
4. По цели произведено 40 выстрелов, причем зарегистрировано 37 попаданий. Найти относительную частоту промахов.
5. При испытании партии телевизоров относительная частота бракованных телевизоров оказалась равной 0,15. найти число качественных телевизоров, если было проверено 400 телевизоров.

3 вариант.

1. В ящике 100 деталей, из них 18 бракованных. Наудачу извлечены4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.
2. На складе имеется 25 кинескопов, причем 15 из них изготовлены Минским заводом. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу кинескопов окажутся 4 кинескопа Минского завода.
3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы один шар оказался белыми, а два черным?

4. По цели произведено 30 выстрелов, причем зарегистрировано 28 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.
5. При проверке качества электрических лампочек оказалось, что относительная частота бракованных лампочек равна 0,2. Найти число качественных электрических лампочек, если всего было проверено 600 лампочек.

4 вариант.

1. Устройство состоит из 15 элементов, из которых 4 изношены. При включении устройства включаются случайным образом 3 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.
2. В группе 28 студентов, среди которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 4 отличника.
3. В партии из 12 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей 4 - стандартные.
4. Отдел технического контроля обнаружил 25 бракованных деталей в партии из случайно отобранных 300 деталей. Найти относительную частоту появления стандартных деталей.
5. При проверке учебников относительная частота качественных учебников оказалась равной 0,85. найти число бракованных книг, если всего было проверено 400 учебников.

Контрольные вопросы:

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?
3. Дайте определение противоположных событий.
4. Сформулируйте классическое определение вероятности.
5. Чему равна вероятность достоверного события?
6. Чему равна вероятность невозможного события?

Практическое занятие 13.

Тема: Применение терем сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности, формула Байесса.

Цель занятия: решение задач на вычисление условных вероятностей, выполнение операций над вероятностями, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Сложение и умножение вероятностей

Вероятность противоположного события $\overline{A}$ определяется по формуле: $p(\overline{A})=1-p(A)$.

Для несовместных событий вероятность суммы двух событий вычисляется по формуле: $p(A+B)=p(A)+p(B)$.

Пример1. Завод производит 85% продукции первого сорта и 10% - второго. Остальные изделия считаются браком. Какова вероятность, что взяв наудачу изделие, мы получим брак?

Решение. $P=1-(0,85+0,1)=0,05$.

Вероятность суммы двух любых случайных событий равна $p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB)$.

Пример 2. Из 20 студентов 5 человек сдали на двойку экзамен по истории, 4 – по английскому языку, причём 3 студента получили двойки по обоим предметам. Каков процент студентов в группе, не имеющих двоек по этим предметам?

Решение. P = 1 - (5/20 + 4/20 - 3/20) = 0,7 (70%)

Условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло, называется

$$p(B/A)=\frac{p(AB)}{p(A)}$$

Пример 3. В урне лежит N шаров, из них n белых. Из неё достают шар и, не кладя его обратно, достают ещё один. Чему равна вероятность того, что оба шара белые?

Решение. Обозначим A – событие, состоящее в том, что первым вынули белый шар, через B событие, состоящее в том, что первым вынули чёрный шар, а через C событие, состоящее в том, что вторым вынули белый шар; тогда

$$p(A)=\frac{n}{N};\quad p(B)=\frac{N-n}{N};\quad p(CA)=\frac{n-1}{N-1};\quad p(C\mid B)=\frac{n}{N-1};$$

$$p(AC)=p(A)*p(C\mid A)=\frac{n*(n-1)}{N*(N-1)}$$

Пример 4. Из 30 экзаменационных билетов студент подготовил только 25. Если он отказывается отвечать по первому взятому билету (которого он не знает), то ему разрешается взять второй. Определить вероятность того, что второй билет окажется счастливым.

Решение. Пусть событие A заключается в том, что первый вытащенный билет оказался для студента «плохим», а B – второй – «хорошим». Поскольку после наступления события A один из «плохих» уже извлечён, то остаётся всего 29 билетов, из которых 25 студент знает. Отсюда искомая вероятность равна P(B/A)=25/29.

Вероятность произведения: p(AB)=p(A)*p(B|A)=p(B)*p(A|B).

Пример. По условиям предыдущего примера найти вероятность успешной сдачи экзамена, если для этого студент должен ответить на первый билет, или, не ответив на первый, обязательно ответить на второй.

Решение. Пусть события A и B заключаются в том, что соответственно первый и второй билеты «хорошие». Тогда $\overline{A}$ - появление «плохого» билета в первый раз. Экзамен будет сдан, если произойдёт событие А, или одновременно $\overline{A}$ и В. То есть искомое событие С – успешная сдача экзамена выражается следующим образом: С=А+$\overline{A}$В. Отсюда

р(С)=р(А+$\overline{A}$В)=р(А)+р($\overline{A}$В)=р(А)+р($\overline{A}$)р(В/$\overline{A}$)=25/30+5/30*25/29=0,977

или р(С)=1 - р($\overline{C}$)=1 - р($\overline{A}*\overline{B}$)=1 - р($\overline{A}$)* р($\overline{A}/\overline{B}$)=1 -5/30*4/29=0,977

Случайные события А и В назовём *независимыми,* если р(АВ)=р(А)*р(В).

<u>Пример</u>. Рассмотрим предыдущий пример с урной, содержащей N шаров, из которых n белых, но изменим опыт: вынув шар, мы кладём его обратно и только затем вынимаем следующий. А – событие, состоящее в том, что первым вынули белый шар, В – событие, состоящее в том, что первым вынули чёрный шар, а С – событие, состоящее в том, что вторым вынули белый шар; тогда

$p(A)=\dfrac{n}{N}$; $p(B)=\dfrac{N-n}{N}$; $p(C/A)=\dfrac{n}{N}$; $p(C\mid B)=\dfrac{n}{N}$;

$$p(AC)=p(A)*p(C\mid A)=\frac{n*n}{N*N}=p(A)*p(C);$$

т.е. в этом случае события А и С независимы.

Пусть события $H_1,H_2,...,H_n$ удовлетворяют условиям

$H_i*H_j=\varnothing$, если $i\neq j$, и $\sum_{i=1}^{n}H_i=\Omega$.

Такую совокупность называют *полной группой событий.*

Пусть интересующее нас событие А может наступить после реализации одного из H_i и известны вероятности $p(H_i)$, $p(A|H_i)$. В этом случае справедлива формула полной вероятности

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n}p(H_i)*p(A\mid H_i).$$

<u>Пример 1.</u> Литьё в болванках поступает из 2-х цехов: 70% из первого и 30% из второго. При этом продукция первого цеха имеет 10% брака, а второго 20%. Найти вероятность того, что одна взятая наугад болванка имеет дефект.

Решение

$p(H_1)=0{,}7;\ p(H_2)=0{,}3;\ p(A|H_1)=0{,}1;\ p(A|H_2)=0{,}2;\ P=0{,}7*0{,}1+0{,}3*0{,}2=0{,}13$ *(13% болванок в цехе дефектны).*

Пример 2. В урне лежит N шаров, из которых n белых. Достаём из неё (без возвращения) два шара. Какова вероятность, что второй шар белый?

Решение

H_1 – первый шар белый; $p(H_1)=n/N;$

H_2 – первый шар чёрный; $p(H_2)=(N-n)/N;$

A – второй шар чёрный; $p(A|H_1)=(n-1)/(N-1);\ p(A|H_2)=n/(N-1)$

$$P(A)=p(H_1)*p(A|H_1)+p(H_2)*p(A|H_2)=\frac{n}{N}*\frac{n-1}{N-1}+\frac{N-n}{N}*\frac{n}{N-1}=\frac{n}{N}$$

Формула Байеса

Предположим, что выполняются условия предыдущего пункта и дополнительно известно, что событие A произошло. Найдём вероятность того, что при этом была реализована гипотеза H_k. По определению условной вероятности

$$p(H_k\mid A)=\frac{p(H_kA)}{p(A)}=\frac{p(H_k)*p(A\mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n}p(H_i)*p(A\mid H_i)}$$

Полученное соотношение - это *формула Байеса*. Она позволяет по известным (до проведения опыта) $p(H_i)$ и условным вероятностям $p(A|H_i)$ определить условную вероятность $p(H_i/A)$, которую называют *апостериорной* (то есть полученной при условии, что в результате опыта событие A уже произошло).

Пример 3. 30% пациентов, поступивших в больницу, принадлежат первой социальной группе, 20% - второй и 50% - третьей. Вероятность заболевания туберкулёзом для представителя каждой социальной группы соответственно равна 0,02, 0,03 и 0,01. Проведённые анализы для случайно выбранного пациента показали наличие туберкулёза. Найти вероятность того, что это представитель третьей группы.

Решение

Пусть H_1, H_2, H_3 – гипотезы, заключающиеся в том, что пациент принадлежит соответственно первой, второй и третьей группам. Очевидно, что они образуют полную группу событий, причём $p(H_1)=0{,}3$; $p(H_2)=0{,}2$; $p(H_3)=0{,}5$. По условию событие А, обнаружение туберкулёза у больного, произошло, причём условные вероятности по данным условия равны $p(A/H_1)=0{,}02$; $p(A/H_2)=0{,}03$; и $p(A/H_3)=0{,}01$. Апостериорную вероятность $p(H_3/A)$ вычисляем по формуле Байеса:

$$p(H_3 \mid A) = \frac{p(H_3) * p(A \mid H_3)}{\sum_{i=1}^{3} p(H_i) * p(A \mid H_i)} = \frac{0{,}5 * 0{,}01}{0{,}3 * 0{,}02 + 0{,}2 * 0{,}03 + 0{,}5 * 0{,}01} = \frac{5}{17}.$$

Задания для самостоятельного выполнения:

Вариант 1

1. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,8. найти число годных приборов, если всего было проверено 250 приборов.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при третьем включении зажигания.
3. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,85. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не более трех?

Вариант 2

1. При испытании партии телевизоров относительная частота бракованных телевизоров оказалась равной 0,15. найти число качественных телевизоров, если было проверено 400 телевизоров.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,75. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания.
3. В семье шесть детей. Найти вероятность того, что среди этих детей не более двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

Контрольные вопросы

1. Дать определение суммы событий и сформулировать теорему сложения вероятностей.
2. Дать определение произведения событий и сформулировать теорему умножения вероятностей.
3. Запишите формулу Байесса.

Практическое занятие 14.

Тема: Применение законов распределения к решению задач.

Цель занятия: получить практические навыки нахождения математического ожидания и дисперсии случайной величины.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно, такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины. К числу важных числовых характеристик относится математическое ожидание.

Определение1:Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \dots x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \dots p_n$. Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n .$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i ,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

<u>Пример.</u> Найти математическое ожидание числа появлений события Aв одном испытании, если вероятность события A равна p.

Решение: Случайная величина X – число появлений события A имеет распределение Бернулли, поэтому $M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q.$

Таким образом, *математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события*.

Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

<u>Пример.</u> Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p = 0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение: Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание

$M(X) = np = 10 \cdot 0{,}6 = 6$ (попаданий).

Зная лишь математическое ожидание случайной величины, еще нельзя судить ни о том, какие возможные значения она принимает, ни о том, как они рассеяны вокруг математического ожидания.

Рассмотрим, например, дискретные случайные величины X и Y, заданные следующими законами распределения:

X	-0,001	0,001
P	0,5	0,5

Y	-1000	1000
P	0,5	0,5

Математические ожидания этих величин $M(X) = M(Y) = 0$.

Другими словами, математическое ожидание полностью случайную величину не характеризует. По этой причине наряду с математическим ожиданием вводят и другие числовые характеристики.

Определение1: Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием: $X – M(X)$.

Свойство отклонения: Математическое ожидание отклонения равно нулю: $M[X – M(X)]= 0$.

Доказательство: Пользуясь свойствами математического ожидания и тем, что $M(X)$- постоянная величина, имеем

$M[X – M(X)]= M(X) – M[M(X)] = M(X) –M(X)= 0$.

Замечание: Наряду с термином "отклонение" используют термин "центрированная величина". Центрированной случайной величиной $\overset{\circ}{X}$ называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием: $\overset{\circ}{X} = X – M(X)$.

Определение2: Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$\boldsymbol{D(X) = M[X - M(X)]^2}$.

Пусть дискретная случайная величина задана рядом распределения

X	x_1	x_2	x_3	…..		x_n
P	p_1	p_2	p_3	…..		p_n

Тогда

$D(X) = M[X - M(X)]^2 = [x_1\text{-}M(X)]^2p_1 + [x_2\text{-}M(X)]^2p_2 + \ldots + [x_n\text{-}M(X)]^2p_n$.

Таким образом, *чтобы найти дисперсию, достаточно вычислить сумму произведений возможных значений квадрата отклонения на их вероятности*.

Пример. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим рядом распределения:

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Решение: Математическое ожидание $M(X) = 1\cdot0{,}3+2\cdot0{,}5+5\cdot0{,}2 = 2{,}3$.

Тогда $D(X) = (1 - 2{,}3)^2\cdot0{,}3 + (2 - 2{,}3)^2\cdot0{,}5 + (5 - 2{,}3)^2\cdot0{,}2 = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 2{,}01$.

Для вычисления дисперсии часто удобно пользоваться другой формулой:

$\boldsymbol{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2}$.

Доказательство: $D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2X\cdot M(X) + M^2(X)] = M(X^2) - 2M(X)\cdot M(X) + M^2(X) =$

$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Таким образом, *дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания*.

Пример. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим рядом распределения:

X	2	3	5

P	0,1	0,6	0,3

Решение: Математическое ожидание $M(X) = 2\cdot0{,}1+3\cdot0{,}6+5\cdot0{,}3 = 3{,}5$. Тогда $M(X^2) = 2^2\cdot0{,}1+3^2\cdot0{,}6+5^2\cdot0{,}3 = 13{,}3$. Дисперсия $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05$.

Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p = 0{,}6$. Найти дисперсию общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение: Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и ,следовательно, искомая дисперсия

$D(X) = npq = 10\cdot0{,}6\cdot0{,}4 = 2{,}4$ ($q = 1-p = 1-0{,}6 = 0{,}4$).

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

1. Дискретная случайная величина распределения по закону. Найти Д (X).

x	1	2	3	4
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки n=10.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

Перейти к условным вариантам $u_i=x_i-104$.

3. Разыграть пять возможных значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	10	2	18
p	0,2	0,17	0,63

4. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: $x_1=8$ с вероятностью $p_1=0{,}2$, $x_2=6$ с вероятностью $p_2=0{,}4$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=20.

Вариант 2.

1. Дискретная случайная величина распределения по закону. Найти Д (Х).

x	2	4	6	8
p	0,4	0,2	0,3	0,1

2. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=100.

x_i	340	360	375	380
n_i	20	20	18	12

Перейти к условным вариантам $u_i=x_i-360$.

3. Разыграть пять возможных значений дискретной случайной величины Х, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	18	10	2
p	0,17	0,61	0,22

4. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины, заданной законом распределения.

У	2	4	5	6
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дискретной случайной величины.
2. Дайте определение закона распределения случайной величины.
3. Запишите числовые характеристики случайных величин.

Практическое занятие 15.

Тема: Выборки, выборочное распределение, построение полигона и гистограммы частот

Цели занятия: отработать навыки построения для заданной выборки ее графической диаграммы, расчёта по заданной выборке её числовых характеристик.

Содержание отчета

1. Цель работы

2. Выполненная практическая работа в соответствии с заданием
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Генеральной совокупностью называется – совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, производимых в неизменных условиях над одним объектом.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности. Более строго: выборка – это последовательность X_1, X_2, … X_n независимых одинаково распределенных случайных величин, распределение каждой из которых совпадает с распределением генеральной случайной величины.

Число объектов (наблюдений) в совокупности, генеральной или выборочной, называется ее *объемом*; обозначается соответственно через N и n. Конкретные значения выборки, полученные в результате наблюдений (испытаний), называют *реализацией выборки* и обозначают строчными буквами x_1, x_2 …x_n.

Статистическое распределение выборки

Пусть изучается некоторая случайная величина X. С этой целью над случайной величиной X производится ряд независимых опытов (наблюдений). В каждом из этих опытов величина X принимает то или иное значение. Пусть она приняла n_1 раз значение x_1, n_2 раз – значение x_2, …,n_k раз – значение $x_к$. При этом $n_1 + n_2 +\ldots+ n_k = n$– объем выборки.

Значения x_1, x_2 …$x_к$ называются *вариантами* случайной величины X.

Вся совокупность значений случайной величины X представляет собой первичный статистический материал, который подлежит дальнейшей обработке, прежде всего – упорядочению.

Операция расположения значений случайной величины (признака) по неубыванию называется *ранжированием* статистических данных.

Полученная таким образом последовательность $x_1, x_2 \ldots x_n$ значений случайной величины X (где $x_1 \le n_2 \le \ldots \le x_n$) называется *вариационным рядом.*

Числа n_i, показывающие, сколько раз встречаются варианты x_i в ряде наблюдений, называются *частотами*, а отношение их к объему выборки – *относительными частотами* (w_i), т.е. $w_i = \frac{n_i}{n}$, где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Статистическим распределением выборки или *статистическим рядом* называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i или относительных частот w_i.

Записывается статистическое распределение в виде таблицы. Первая строка содержит варианты, а вторая – их частоты n_i (или относительные частоты).

Эмпирическая функция распределения

Одним из способов обработки вариационного ряда является построение эмпирической функции распределения.

Эмпирической (статистической) *функцией распределения* называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $\{X < x\}$: $F_n{}^*(x) = p^*\{X < x\}$.

Для нахождения значений эмпирической функции удобно пользоваться формулой

$$F_n{}^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n – объем выборки, n_x – число наблюдений, меньших x ($X \in R$).

Эмпирическая функция обладает следующими свойствами:

1. Значения эмпирической функции принадлежит отрезку [0,1].

2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.

3. Если x_i – наименьшая варианта, а x_k - наибольшая, то $F^*(x_i) = 0$ при $x \le x_i$ и $F^*(x_k) = 1$ при $x > x_k$.

Полигон и гистограмма

Статистическое распределение изображается графически (для наглядности) в виде так называемых *полигона* и *гистограммы.*

Дискретное распределение признака X

Полигон, как правило, служит для изображения дискретного (т.е. варианты отличаются на постоянную величину) статистического ряда. *Полигоном частот* называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1,n_1), (x_2,n_2), …, (x_k,n_k);

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1,w_1), (x_2,w_2), …, (w_k,p_k), где x_i - варианты выборки;

Варианты x_i откладываются на оси абсцисс, а частоты и, соответственно, относительные частоты – на оси ординат. Полигон относительных частот является статистическим аналогом многоугольника распределения.

Непрерывное распределение признака X

Для непрерывно распределенного признака (т.е. варианты могут отличаться один от другого на сколь угодно малую величину) можно построить полигон частот, взяв середины интервалов в качестве значений x_1, x_2,….,x_k. Более употребительна так называемая гистограмма.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ – плотность частоты.

Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h\frac{n_i}{h} = n_i$ – сумме частот вариант, попавший в i-й интервал.

Очевидно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Гистограмма относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{w_i}{h}$ – плотности относительных частот.

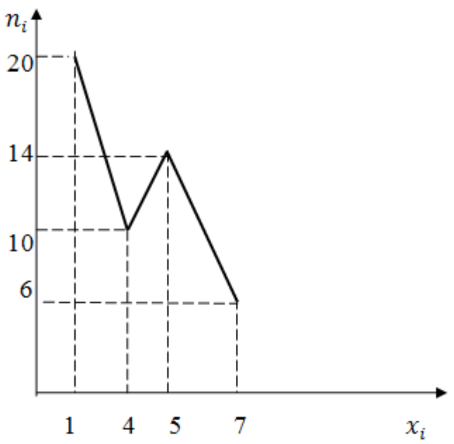
Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h\frac{w_i}{h} = n_i$ – сумме частот вариант, попавший в i-й интервал.

Очевидно, площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.

Задание№1. Построить полигон частот по данному распределению выборки: Решение.

	0	0	4	

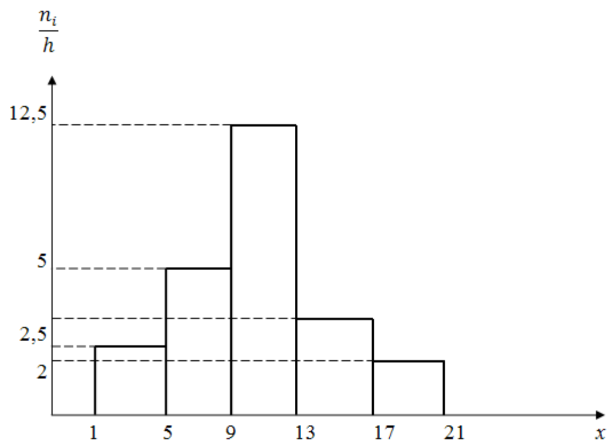
Отметим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i, соединив точки (x_i, n_i) отрезками прямых, получим искомый полигон частот.



Задание №2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема n=100:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	$\frac{n_i}{h}$
1	1-5	10	2,5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2

Решение. Построим на оси абсцисс заданные интервалы длины h=4. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от нее на расстояниях, равных соответствующим плотностям частот. Например, над интервалом (1,5) построим



Отрезок, параллельный оси абсцисс, на расстоянии

$$\frac{n_i}{h} = \frac{10}{4} = 2{,}5,$$

Гистограмма частот изображена на рис.

<u>Задания для самостоятельного выполнения:</u>

Вариант 1.

№ 1. Для выборки 7,-7,2,7,7,5,5,7,5,-7 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Вариант 2.

№ 1. Для выборки 5,2,8,-2,5,-2,0,0,8,5 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	2-5	6
2	5-8	7
3	8-11	4
4	11-14	5
5	14-17	3

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Вариант 3.

№ 1. Для выборки 1,9,2,1,1,5,5,1,5,9 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	2-7	5
2	7-12	10
3	12-17	25
4	17-22	6

5	22-27	4

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Вариант 4.

№ 1. Для выборки 15,10,2,15,15,5,5,15,5,10 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	3-5	4
2	5-7	6
3	7-9	20
4	9-11	40
5	11-13	20
6	13-15	4
7	15-17	6

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Контрольные вопросы.

1. Чему равна площадь гистограммы частот?

2. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?

3. Какие графические изображения выборок Вы знаете? Какова их роль в статистике?